# HIDRODINÂMICA

DEFINIÇÕES

CARACTERIZAÇÃO DO ESCOAMENTO

EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Alterado em: 9/12/2018

**Fluido Ideal** ~ É um fluido **incompressível** (a densidade não varia com o tempo) e **sem viscosidade** (o que garante a condição de ausência de atrito interno). Os **líquidos** podem de um modo geral ser considerados incompressíveis, ao contrário dos **gases**)

O escoamento de um fluido chama-se **estacionário ou permanente,** quando as características do escoamento não variam com o tempo. Todas as partículas que passam numa dada posição têm a mesma velocidade em todos os instantes seguintes.

As trajetórias descritas pelas partículas do fluído chamam-se **Linhas de escoamento.** No escoamento estacionário estas linhas mantêm-se ao longo do tempo.

**Linhas de corrente** são linhas cuja tangente, em cada um dos seus pontos, tem a direção do vetor velocidade nesse ponto**. No regime permanente as trajetórias ou linhas de escoamento coincidem com as linhas de corrente.**

As linhas de corrente que passam através de uma secção imaginária denominam-se **tubo de corrente** que no regime permanente coincide com o **tubo de escoamento**

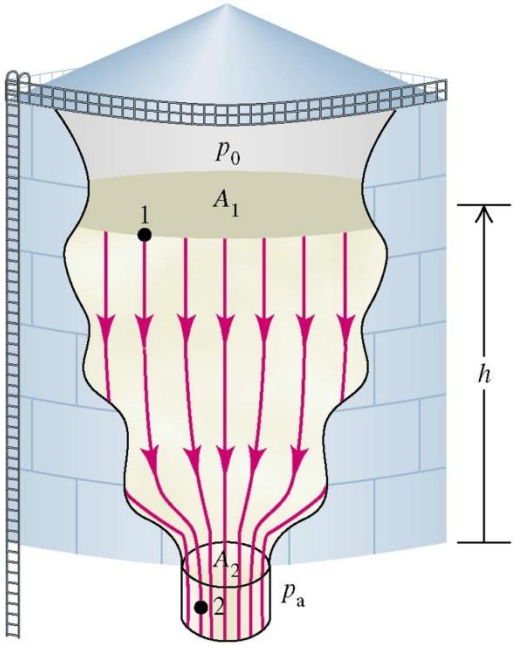
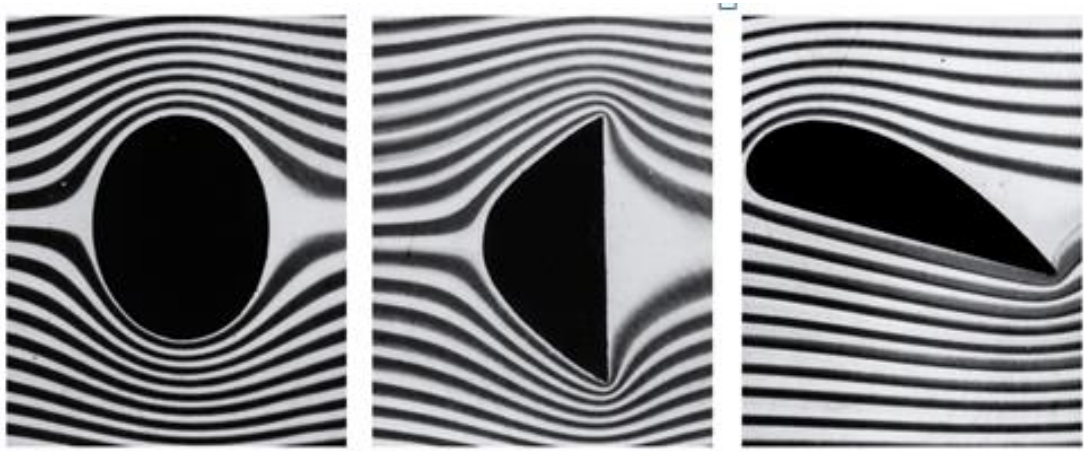
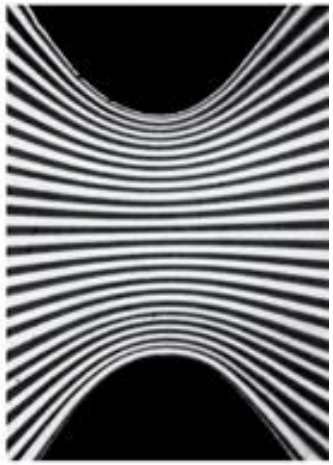



**FIGURA 14.24** Esquema para calcular a velocidade de efluxo da gasolina que escoa pela parte inferior do tanque de armazenamento.

## Escoamento laminar

Neste tipo de escoamento as partículas do fluido deslocam-se umas em relação às outras como se fossem lâminas de fluido que se deslocam sobre outras lâminas.





d) Escoamento numa secção de um canal com as peredes de forma irregula

## Escoamento turbulento

Quando a velocidade é muito grande ou quando aparece um obstáculo o movimento das partículas torna-se errático e chama-se **turbulento**. Num escoamento turbulento não existe constância ao longo do tempo e <u>teoricamente ele nunca será estacionário ou permanente</u>. Quando se pode considerar que as médias das velocidades, calculadas no mesmo ponto para vários instantes, se mantêm constantes **então na prática o escoamento turbulento pode ser considerado estacionário ou permanente**

Na experiência que se mostra do lado direito, injeta-se um líquido colorido em água. Quando a velocidade é pequena o escoamento é laminar. Aumentando gradualmente a velocidade o escoamento passa para turbulento

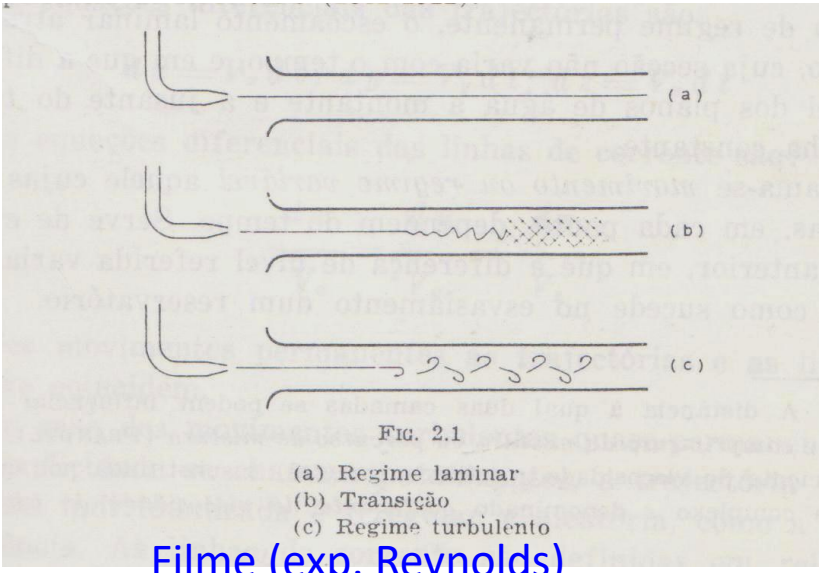



FIG. 2.1

(a) Regime laminar
(b) Transição
(c) Regime turbulento

Filme (exp. Reynolds)

Escoamento laminar visualizado:

Escoamento turbulento visualizado:

O número de Reynolds permite ter uma indicação sobre as características do escoamento, em função de uma variável D (no caso dos escoamentos em tubo é o diâmetro), **v** é a velocidade, **ρ** é a massa volúmica e **η** é a viscosidade do fluido.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\eta}$$

$\mathrm{Re} < 2300$ Escoamento Laminar

$\mathrm{Re} > 3000$ Escoamento Turbulento

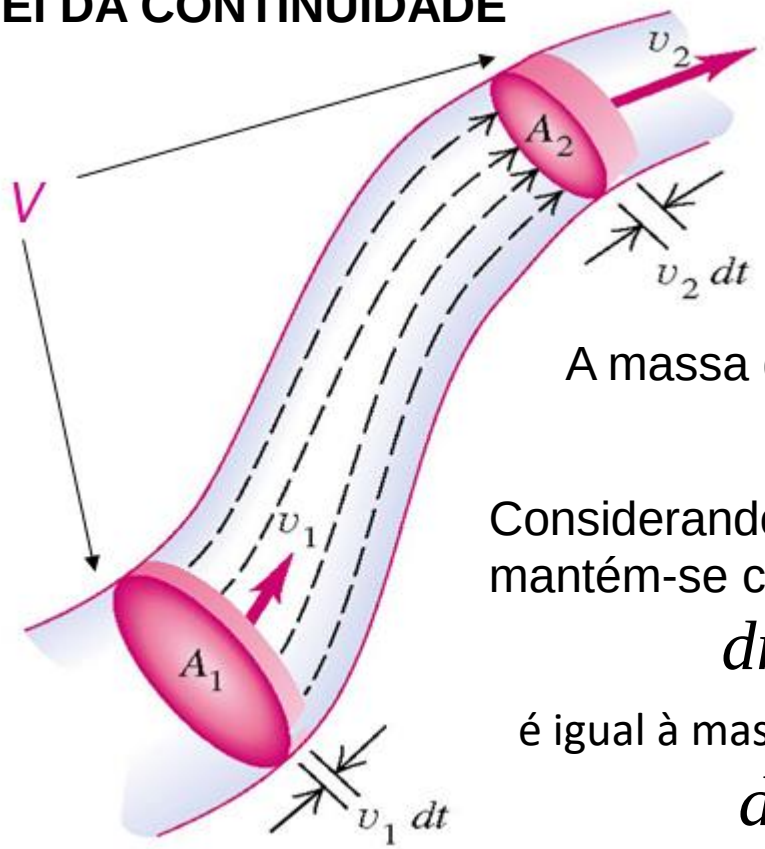
Repare-se que Re aumenta com a velocidade do escoamento e diminui com a viscosidade.

Também se pode escrever o número de Reynolds em função da **viscosidade cinemática**

$$\upsilon = \frac{\eta}{\rho}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{vD}{\upsilon}$$

# LEI DA CONTINUIDADE




Seja um fluido que se move nas condições representadas na figura. A altura do cilindro que contém o fluido que passou no intervalo de tempo *dt* na secção A1 é:

$$dx = v_1 dt$$

A massa que passou no intervalo dt na secção de área $A_1$

$$dm_1 = \rho\, A_1\, v_1 dt$$

Considerando o fluido incompressível, a massa volúmica mantém-se constante e a massa que passa na secção (2)

$$dm_2 = \rho\, A_2\, v_2 dt$$

é igual à massa que passa na secção (1)

$$dm_1 = dm_2 \Rightarrow \rho\, A_1\, v_1 dt = \rho\, A_2\, v_2 dt$$

$$\boxed{A_1\, v_1 = A_2\, v_2}$$

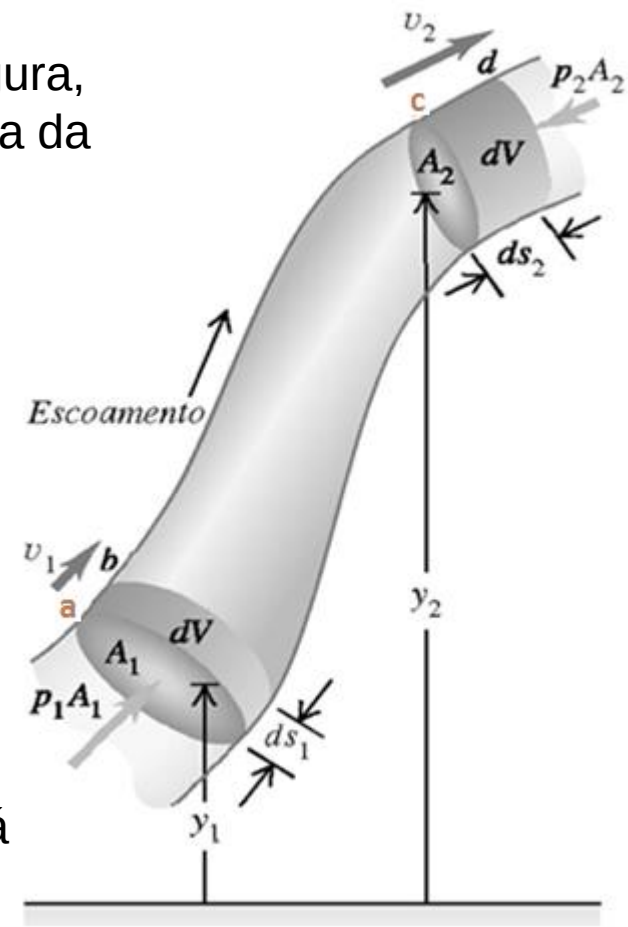
Ao produto da área pela velocidade média na secção chama-se CAUDAL. Este produto representa o volume de fluido que passa na secção por unidade de tempo.

$$Q = A\,v = A\frac{dx}{dt} = \frac{Adx}{dt}$$

O CAUDAL ***Q*** É CONSTANTE ENTRE DUAS SECÇÕES, SE NÃO HOUVER ENTRADAS OU SAÍDAS DE FLUIDO (fontes e sumidouros).

## LEI DA BERNOULLI

Considere-se o tubo de escoamento representado na figura, no qual se escoa um fluido ideal num tubo em que a área da secção vai diminuindo na direção do escoamento.




Num determinado intervalo de tempo *dt*, o fluido que ocupava o volume compreendido entre as secções ***a*** e ***c***, passou a ocupar o volume compreendido entre as secções ***b*** e ***d***.

*Pela lei da continuidade, se $A_2<A_1$ (a secção reduz-se), será $v_2>v_1$, o que quer dizer que há aumento da velocidade e portanto aceleração do movimento.*

Não considerando, para já, a força da gravidade (tubo horizontal) e desprezando o atrito interno porque se está a considerar um fluido ideal (incompressível e não viscoso), **a força responsável pela aceleração do fluido é a variação da pressão entre as duas secções**.

Sabendo que $ds_1 = v_1 dt; ds_2 = v_2 dt$

o trabalho realizado pela força $F_1 = P_1 A_1$ exercida pelo fluído, que está do lado esquerdo, sobre o conjunto de fluido em estudo ´é:

$$dW_1 = p_1 A_1 ds_1$$

O trabalho realizado pela força $F_2 = P_2 A_2$ exercida pelo fluído que está do lado oposto e que se opões ao movimento é:

$$dW_2 = -p_2 A_2 ds_2$$

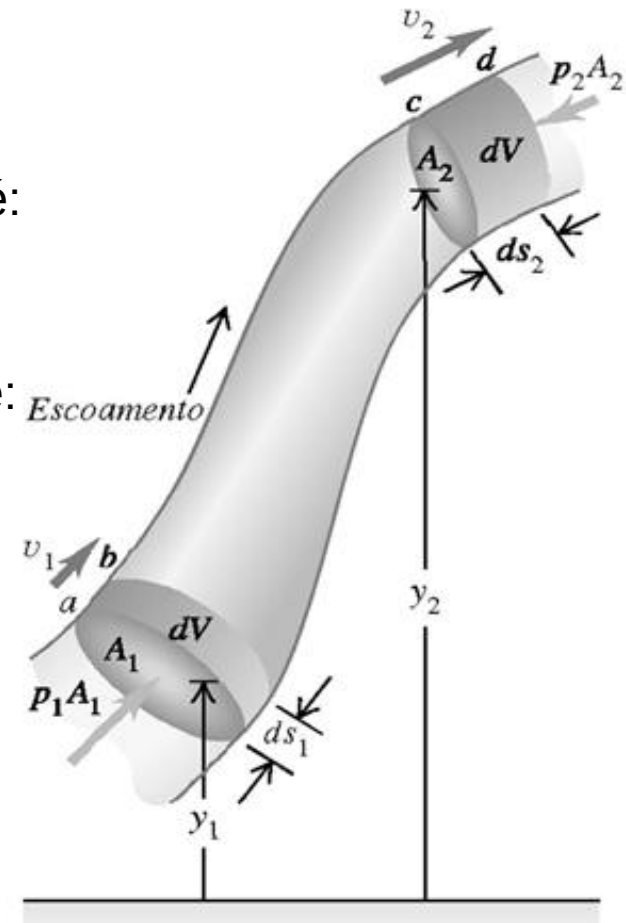
O trabalho resultante realizado pelas forças de pressão é:

$$dW = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2$$

Como o fluido é incompressível, o volume *dV* mantém-se:

$$\mathrm{dV} = \mathrm{A_1 ds_1} = \mathrm{A_2 ds_2}$$ , resultando que:

$$dW = (p_1 - p_2) dV$$




Considerando agora o peso (tubo na posição indicada na figura), a variação da energia potencial é dada por:

$$dU = m_2 g y_2 - m_1 g y_1 = \rho\, dV\, g(y_2 - y_1)$$

A variação da energia cinética é dada por:

$$\mathrm{dK} = \rho \mathrm{dV} \times \frac{\mathrm{v}_2^2}{2} - \rho \mathrm{dV} \times \frac{\mathrm{v}_1^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \mathrm{dV} (\mathrm{v}_2^2 - \mathrm{v}_1^2)$$

Como o peso é uma força conservativa, então a variação da energia mecânica total (cinética + potencial) é igual ao trabalho realizado pelas forças de pressão (força não conservativa)

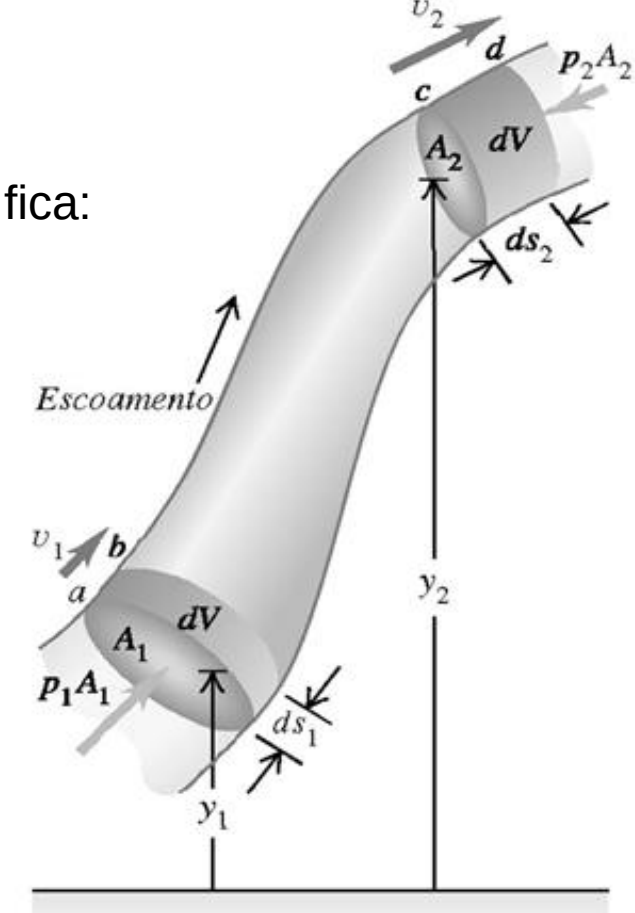
$$dU + dK = dW$$

$$\frac{1}{2}\rho\, dV(v_2^2 - v_1^2) + \rho\, dV\; g(y_2 - y_1) = (p_1 - p_2)dV$$

Dividindo ambos os membros por *dV* e desenvolvendo fica:

$$\frac{1}{2}\rho\, v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\; y_2 - \rho\, g\; y_1 = p_1 - p_2$$

$$\boxed{p_1 + \rho\, g\; y_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = p_2 + \rho\, g\; y_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2}$$




Esta equação (Bernoulli) traduz a variação da **energia por unidade de volume**, uma vez que se dividiu a equação da energia por *dV.* A energia está, então, expressa em unidades de pressão.

No estudo da hidráulica normalmente a equação apresenta-se de outra forma, representando os termos da energia **por unidade de peso**. Para o efeito divide-se a equação anterior pelo peso por unidade de volume

$$\gamma = \rho g$$

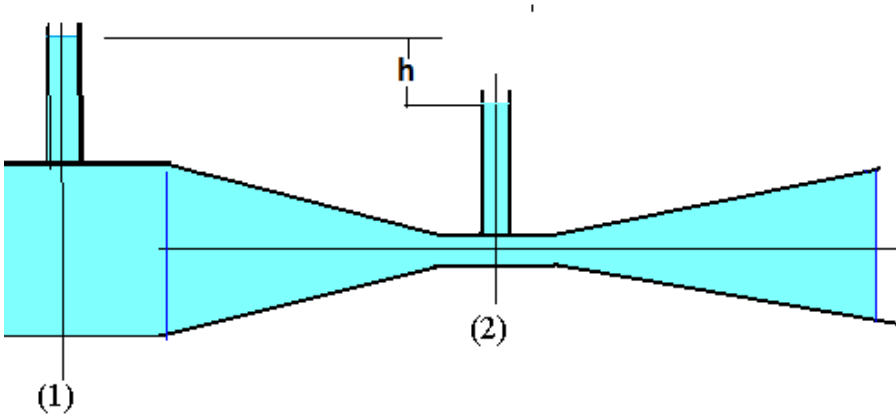
$$\boxed{\frac{p_1}{\gamma} + y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + y_2 + \frac{v_2^2}{2g}}$$

**Contador de Venturi ,** como exemplo da aplicação conjunta das duas leis estudadas)

Equação da continuidade

$$v_1 \times a_1 = v_2 \times a_2 = Q$$

$$v_1 = v_2 \times \frac{\frac{\pi D_2^2}{4}}{\frac{\pi D_1^2}{4}} = v_2 \times \frac{D_2^2}{D_1^2} = v_2 \times \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$




Equação de Bernoulli

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}$$

Dado que $p_1 - p_2 = \rho g h$ fica: $v_2^2 = v_1^2 + \frac{2\rho g h}{\rho} = v_1^2 + 2gh$

Sendo $V_1^2 = V_2^2 \times \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4$

$$v_2^2 = v_2^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 + 2gh \Rightarrow v_2^2\left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right) = 2gh$$

$$\boxed{v_2^2 = \frac{2gh}{1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4}}$$

E o caudal que passa no tubo pode ser calculado apenas através da leitura de h, e do conhecimendo0 dos diâmetros $D_1$ e $D_2$, fazendo

$$Q = v_2 A_2$$

**Perda de energia por atrito com as paredes do tubo e devido à turbulência**

$$\frac{p_1}{\gamma} + y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + y_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_L$$

Nesta formulação do Teorema de Bernoulli todas as unidades são comprimentos (metros de coluna de água)

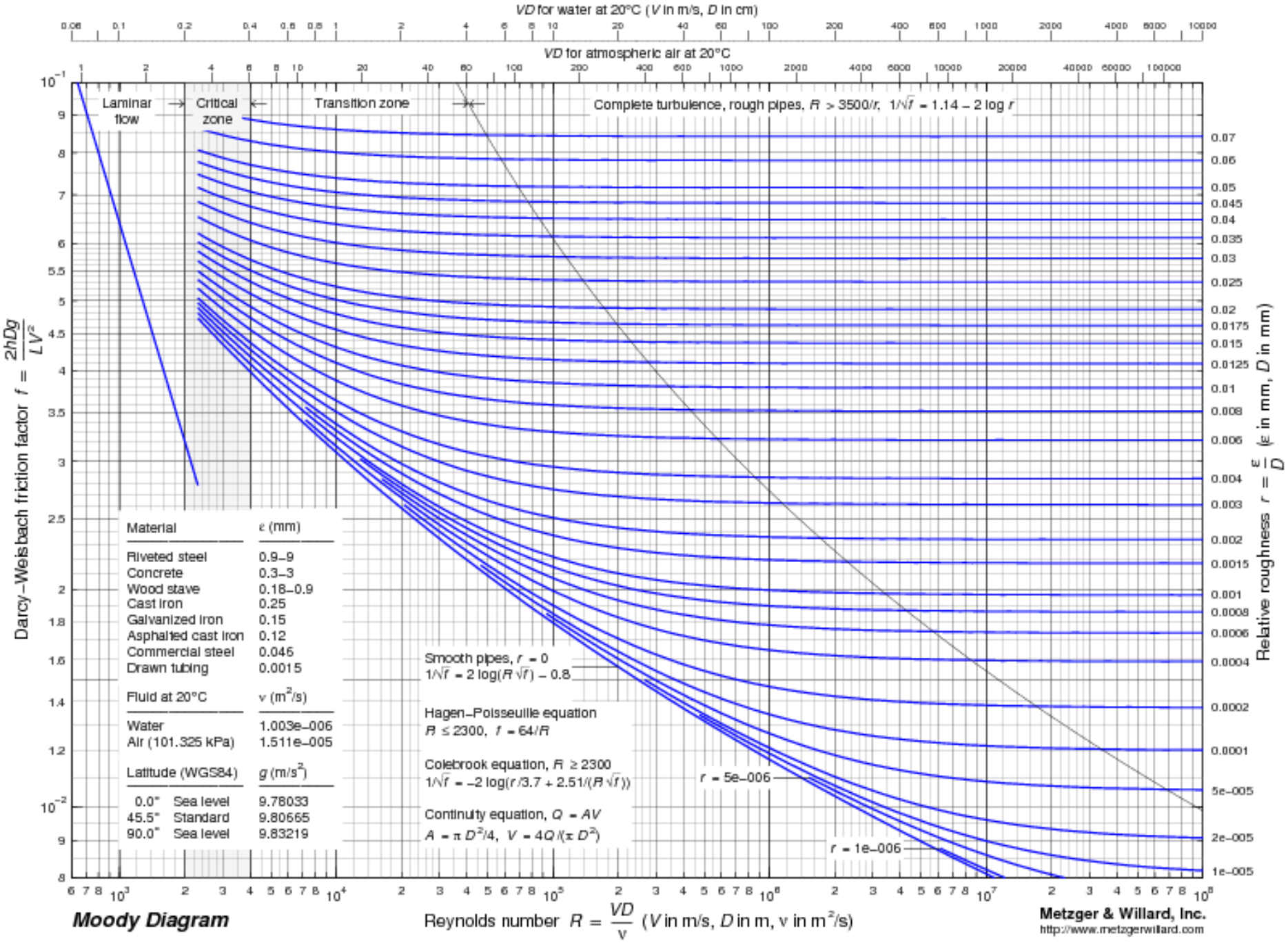
$\frac{p}{\gamma}$ é a altura representativa da pressão

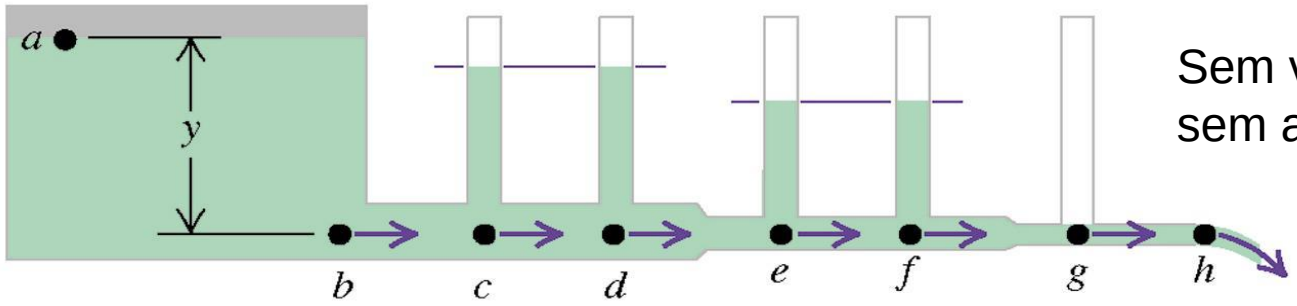
$\frac{v^2}{2g}$ é a altura cinética

A perda de energia por fricção do fluído nas paredes do tubo pode ser representada por :

$$h_L = f\,\frac{L}{D}\,\frac{v^2}{2g}$$

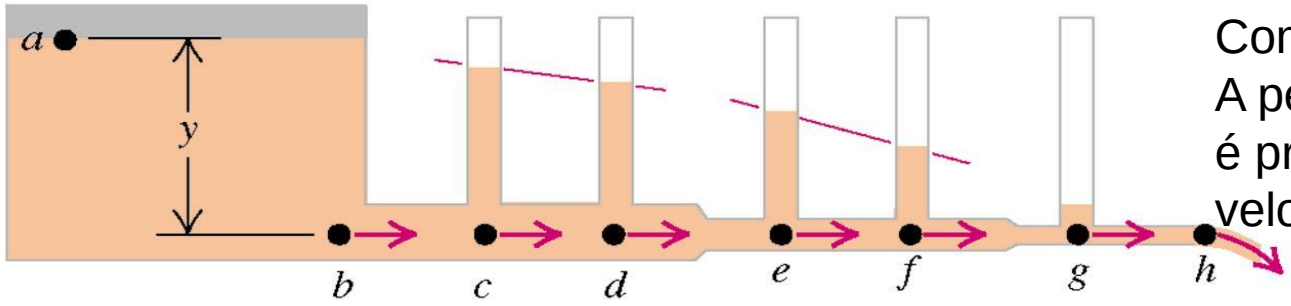
Em que f é o índice de resistência (fator de fricção) dependente essencialmente da rugosidade das paredes do tubo e nalguns casos da velocidade


VD for water at 20°C (V in m/s, D in cm)
VD for atmospheric air at 20°C
Laminar flow
Critical zone
Transition zone
Complete turbulence, rough pipes, R > 3500/r, 1/√f = 1.14 – 2 log r
Material | ε (mm)
Riveted steel 0.9–9
Concrete 0.3–3
Wood stave 0.18–0.9
Cast iron 0.25
Galvanized iron 0.15
Asphalted cast iron 0.12
Commercial steel 0.046
Drawn tubing 0.0015
Fluid at 20°C | ν (m²/s)
Water 1.003e–006
Air (101.325 kPa) 1.511e–005
Latitude (WGS84) | g (m/s²)
0.0° Sea level 9.78033
45.5° Standard 9.80665
90.0° Sea level 9.83219
Smooth pipes, r = 0
1/√f = 2 log(R √f) – 0.8
Hagen–Poisseuille equation
R ≤ 2300, f = 64/R
Colebrook equation, R ≥ 2300
1/√f = –2 log(r/3.7 + 2.51/(R √f))
Continuity equation, Q = AV
A = π D²/4, V = 4Q/(π D²)
r = 5e–006
r = 1e–006
Darcy–Weisbach friction factor f = 2hDg/LV²
Relative roughness r = ε/D (ε in mm, D in mm)
Reynolds number R = VD/ν (V in m/s, D in m, ν in m²/s)
Moody Diagram
Metzger & Willard, Inc.
http://www.metzgerwillard.com



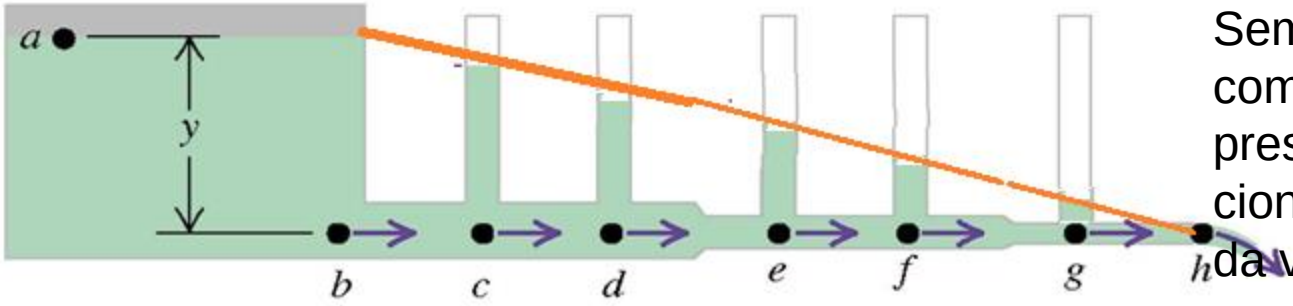

(a)

Sem viscosidade e sem atrito.




(b)

Com viscosidade. . A perda de pressão é proporcional à velocidade




(c)

Sem viscosidade e com atrito. A perda de pressão é propor-cional ao quadrado da velocidade