



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

SANEAMENTO AMBIENTAL I

SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA

EDUARDO RIBEIRO DE SOUSA

LISBOA, SETEMBRO DE 2001



ÍNDICE DO TEXTO

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	1
2. CONFIGURAÇÃO E ASPECTOS GERAIS DE IMPLANTAÇÃO.....	1
3. ELEMENTOS DE BASE.....	6
3.1 Cadastro dos sistemas de distribuição de água e topografia.....	6
3.2 Consumos e caudais de projecto.....	8
3.3 Caudais de ponta.....	8
4. OUTROS CRITÉRIOS A OBSERVAR.....	9
4.1 Critérios relativos ao dimensionamento hidráulico.....	9
4.2 Diâmetros mínimos.....	10
4.3 Procedimentos para o cálculo hidráulico de redes de distribuição de água.....	11
5. FORMULAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO HIDRÁULICO.....	15
5.1 Considerações gerais e conceitos.....	15
5.2 Estações elevatórias e sobreprensoras.....	18
5.2.1 Conceitos fundamentais e curvas características dos grupos electrobomba ⁰	18
5.2.2 Associação de bombas em paralelo e série.....	27
5.3 Equações fundamentais de equilíbrio hidráulico.....	28
5.3.1 Introdução.....	28
5.3.2 Equações dos troços.....	29
5.3.3 Equações dos nós.....	35
5.3.4 Equações das malhas.....	38



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

6. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO HIDRÁULICO.....	41
6.1 Introdução.....	41
6.2 Descrição sumária dos métodos para a obtenção das condições de equilíbrio hidráulico	41
6.2.1 Equações dos troços e das malhas.....	41
6.2.2 Equações dos nós	43
6.3 Método de <i>Hardy Cross</i>	45
6.3.1 Considerações introdutórias	45
6.3.2 Fundamentos do método.....	45
6.3.3 Procedimento de cálculo	47
6.3.4 Exemplo de aplicação.....	48
6.4 Método de <i>Newton-Raphson</i>	52
6.4.1 Princípios teóricos.....	52
6.4.2 Exemplo de aplicação.....	55
6.5 Método da <i>Teoria Linear</i>	59
6.5.1 Fundamentos do método e procedimentos de cálculo	59
6.5.2 Exemplo de aplicação.....	61
7. ELEMENTOS ACESSÓRIOS EM REDES DE DISTRIBUIÇÃO	65
7.1 Considerações gerais.....	65
7.2 Válvulas de seccionamento.....	66
7.3 Válvulas de purga ou de descarga.....	67
7.4 Hidrantes (bocas de incêndio e marcos de água).....	68
7.5 Bocas de rega e de lavagem.....	69
7.6 Ventosas.....	70
7.7 Outros elementos acessórios. Mapa de nós	71



1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Uma rede geral de distribuição de água pode ser definida como um sistema de tubagens e elementos acessórios instalados na via pública, em terrenos da entidade distribuidora ou em outros sob concessão especial, cuja utilização interessa ao serviço público de abastecimento de água potável.

A partir desta rede geral são alimentados, por meio de ramais de ligação (define-se ramal de ligação como a tubagem que assegura o abastecimento predial de água, desde a rede pública até ao limite da propriedade a servir, em boas condições de caudal e pressão), os diversos edifícios ou instalações a servir.

São igualmente servidos, a partir das redes gerais de distribuição de água:

- as mangueiras ou moto-bombas dos serviços de bombeiros, através de hidrantes (bocas de incêndio e marcos de água);
- as mangueiras para alimentação de camiões-tanque para utilização pública e para a lavagem de ruas e rega de espaços verdes, através de bocas de rega e de lavagem;
- os sistemas de rega dos espaços verdes;
- os fontanários, bebedouros e outros pontos de utilização de água.

No presente Documento, são apresentados, fundamentalmente, os aspectos gerais de traçado de redes de distribuição de água, o seu dimensionamento hidráulico e a localização de órgãos acessórios (órgãos de manobra e de segurança, com sejam válvulas de seccionamento e de descarga e de purga, hidrantes, bocas de rega e de lavagem, e outros acessórios).

Os sistemas de distribuição de água no interior dos edifícios não fazem parte do programa da disciplina, pelo que não serão tratados no âmbito do presente Documento.

2. CONFIGURAÇÃO E ASPECTOS GERAIS DE IMPLANTAÇÃO

As redes gerais de distribuição de água podem classificar-se, no que respeita à sua configuração,

como se segue (Figuras 1 e 2):

- *redes malhadas (ou emalhadas)*, em que as condutas se fecham sobre si mesmas constituindo malhas (define-se malha como um conjunto de tubagens que formam um circuito fechado);
- *redes ramificadas*, em que há uma conduta principal longitudinal que se ramifica para ambos os lados;
- *redes mistas*, que correspondem à conjugação, numa mesma rede de distribuição de água, das duas configurações anteriores (esta é a situação mais vulgar em redes de distribuição domiciliária).

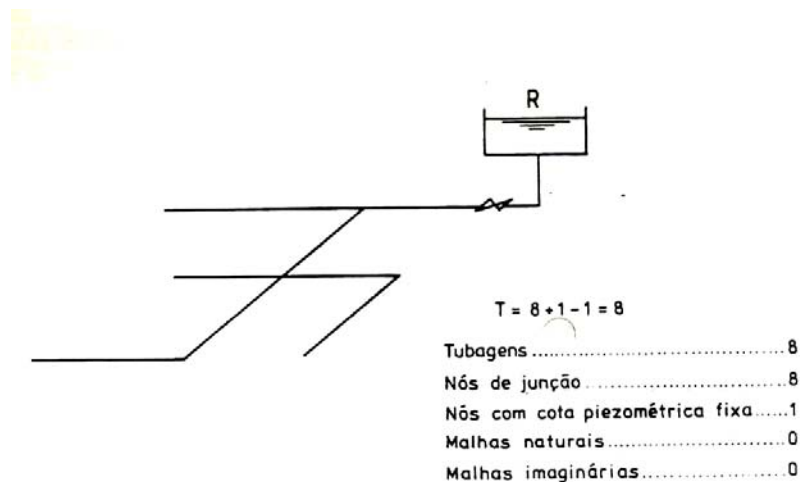


Figura 1 - Rede ramificada com um ponto de alimentação (reservatório)

Sob o ponto de vista hidráulico, nas redes de distribuição de água malhadas, o escoamento é bidireccional, enquanto que nas redes ramificadas é, normalmente, unidireccional, salvo se existir mais do que um ponto de alimentação do sistema (reservatório ou estação elevatória). Nas redes mistas, o escoamento é, simultaneamente, bidireccional e unidireccional.

As vantagens de uma rede de distribuição malhada podem ser resumidas ao seguinte:

- pelo facto do escoamento ser bidireccional, para se atingir um dado ponto, existem percursos alternativos;

- no caso de avaria numa tubagem (por exemplo, pela ocorrência de uma rotura), é possível isolar uma determinada zona da rede de distribuição de água, através do fechamento de um conjunto de válvulas de seccionamento, sem que os restantes consumidores sejam afectados do normal fornecimento, o que lhe confere maior fiabilidade;
- quando ocorrem grandes flutuações de consumo na rede de distribuição, os efeitos, em termos de pressão, são pouco significativos.

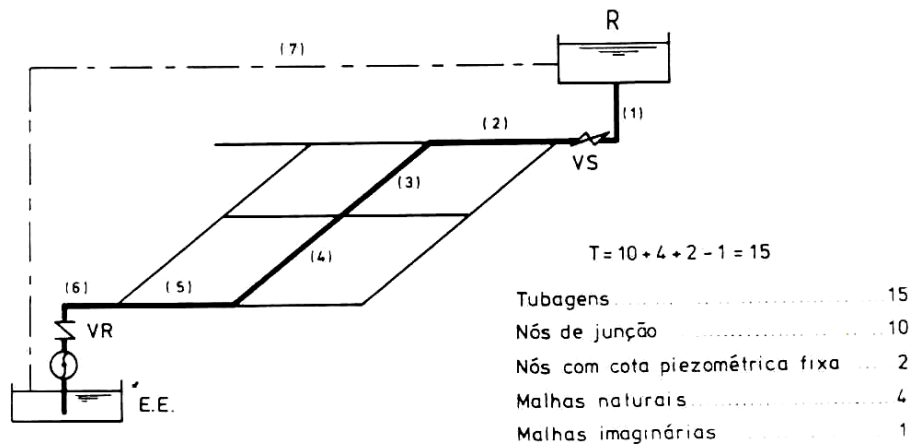


Figura 2 - Rede malhada/mista com dois pontos de alimentação (reservatório e estação elevatória)

No entanto, apresenta as seguintes desvantagens:

- exige custos de investimento superiores, uma vez que requer uma maior quantidade de tubagens e de órgãos acessórios;
- o cálculo para a determinação das condições de equilíbrio hidráulico é mais complexo do que nas redes ramificadas (de facto, como se verá mais adiante neste Documento, este cálculo exige a resolução de um sistema de equações não lineares, que traduzem as equações de continuidade e de conservação de energia).

Em contrapartida, de entre as vantagens de uma rede de distribuição ramificada podem salientar-se as seguintes:

- exige menores custos de investimento, uma vez que requer uma menor quantidade de



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

tubagens e de órgãos acessórios;

- os diâmetros das tubagens são mais económicos;
- o cálculo para a determinação das condições de funcionamento hidráulico é mais simples do que nas redes malhadas, podendo dizer-se que é um problema trivial de hidráulica (de facto, este cálculo exige apenas a aplicação das equações de continuidade aos nós e só posteriormente a utilização da relação perda de carga/caudal, para a determinação das cotas piezométricas nos nós).

No entanto, uma rede de distribuição ramificada apresenta as seguintes desvantagens:

- pelo facto do escoamento ser unidireccional, no caso de avaria numa tubagem (por exemplo, pela ocorrência de uma rotura), são menores as condições de fiabilidade, uma vez que qualquer avaria numa conduta interrompe todo o fornecimento de água a jusante;
- quando ocorrem aumentos ou se verificam flutuações de consumo na rede de distribuição, os efeitos para jusante, em termos de pressão, são significativos;
- os troços, nos pontos terminais da rede de distribuição, têm tendência a acumular sedimentos, devido às baixas velocidades do escoamento.

A distribuição de água potável a um aglomerado populacional pode ser feita por uma só rede geral ou por várias; a solução a adoptar depende das características do aglomerado a abastecer, sendo necessário proceder a um estudo cuidadoso das mesmas.

Assim, a existência de um aglomerado de certa dimensão, em que haja diferenciação nítida de zonas altimétricas, aconselha que se considere uma rede geral de distribuição de água para cada zona. É, por exemplo, o caso da cidade de Lisboa, que está dividida, fundamentalmente, em cinco zonas de distribuição: baixa, média, alta, superior (oriental e ocidental) e limite.

Este critério apresenta grandes vantagens, pois a existência duma rede única obrigaria a uma elevação, do caudal total máximo, a uma altura correspondente à zona mais alta. Deste modo, não só haveria um gasto inútil de energia de bombagem, como ocorreriam elevadas pressões nas zonas baixas. Esta situação obrigaria à instalação de dispositivos de utilização mais resistentes e à implantação de tubagens da rede de distribuição de classes ou pressões de serviço maiores, o que aumentaria o custo total da mesma.



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

No que respeita à implantação (implantação propriamente dita, assentamento, largura e assentamento das valas) de redes de distribuição de água, o Decreto Regulamentar nº 23/95, estipula o seguinte:

“Artigo 24.º Implantação

1 - A implantação das condutas da rede de distribuição em arruamentos deve fazer-se em articulação com as restantes infra-estruturas e, sempre que possível, fora das faixas de rodagem.

2 - As condutas da rede de distribuição devem ser implantadas em ambos os lados dos arruamentos, podendo reduzir-se a um quando as condições técnico-económicas o aconselhem, e nunca a uma distância inferior a 0,80 m dos limites das propriedades.

3 - A implantação das condutas deve ser feita num plano superior ao dos colectores de águas residuais e a uma distância não inferior a 1 m, de forma a garantir protecção eficaz contra possível contaminação, devendo ser adoptadas protecções especiais em caso de impossibilidade daquela disposição.

Artigo 25.º Profundidade

1 - A profundidade de assentamento das condutas não deve ser inferior a 0,80 m, medida entre a geratriz exterior superior da conduta e o nível do pavimento.

2 - Pode aceitar-se um valor inferior ao indicado desde que se protejam convenientemente as condutas para resistir a sobrecargas ou a temperaturas extremas.

3 - Em situações excepcionais, admitem-se condutas exteriores ao pavimento desde que sejam convenientemente protegidas mecânica, térmica e sanitariamente.

Artigo 26.º Largura das valas

1 - Para profundidades até 3 m, a largura das valas para assentamento das tubagens deve ter, em regra, a dimensão mínima definida pelas seguintes fórmulas:

$$L = D_e + 0,50 \text{ para condutas de diâmetro até } 0,50 \text{ m;}$$

$$L = D_e + 0,70 \text{ para condutas de diâmetro superior a } 0,50 \text{ m;}$$

onde L é a largura da vala (m) e D_e o diâmetro exterior da conduta (m).

2 - Para profundidades superiores a 3 m, a largura mínima das valas pode ter de ser aumentada em função do tipo de terreno, processo de escavação e nível freático.

Artigo 27.º Assentamento

1 - As tubagens devem ser assentes por forma a assegurar-se que cada troço de tubagem se apoie contínua e directamente sobre terrenos de igual resistência.



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

2 - Quando, pela sua natureza, o terreno não assegure as necessárias condições de estabilidade das tubagens ou dos acessórios, deve fazer-se a sua substituição por material mais resistente devidamente compactado.

3 - Quando a escavação for feita em terreno rochoso, as tubagens devem ser assentes, em toda a sua extensão, sobre uma camada uniforme previamente preparada de 0,15 m a 0,30 m de espessura, de areia, gravilha ou material similar cuja maior dimensão não exceda 20 mm.

4 - Devem ser previstos maciços de amarração nas curvas e pontos singulares, calculados com base nos impulsos e resistência dos solos.

Artigo 28.º Aterro das valas

1 - O aterro das valas deve ser efectuado de 0,15 m a 0,30 m acima do extradorso das tubagens com material cujas dimensões não excedam 20 mm.

2 - A compactação do material do aterro deve ser feita cuidadosamente por forma a não danificar as tubagens e a garantir a estabilidade dos pavimentos.”

Em complemento ao anteriormente referido, deve ser consultado o *Documento Tubagens e Acessórios de Ligação*.

3. ELEMENTOS DE BASE

3.1 Cadastro dos sistemas de distribuição de água e topografia

Na concepção e dimensionamento de sistemas de distribuição de água, a recolha e avaliação dos elementos de cadastro das infra-estruturas constituem actividades de grande relevância, quer para o projecto de novas infra-estruturas, quer para a ampliação e/ou remodelação de infra-estruturas já existentes.

O Decreto Regulamentar nº 23/95 estipula, no seu artigo 9.º, que:

“1 - Na elaboração de estudos de sistemas de distribuição de água deve ter-se em consideração os elementos constantes dos respectivos cadastros.

2 - Os cadastros devem estar permanentemente actualizados e conter, no mínimo:

a) A localização em planta das condutas, acessórios e instalações complementares, sobre carta topográfica a escala compreendida entre 1:500 e 1:2000, com implantação de todas



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

as edificações e pontos importantes;

b) As secções, profundidades, materiais e tipos de junta das condutas;

c) A natureza do terreno e condições de assentamento;

d) O estado de conservação das condutas e acessórios;

e) A ficha individual para os ramais de ligação e outras instalações do sistema.

3 - Os cadastros podem existir sob a forma gráfica tradicional ou informatizados.”

Apesar desta imposição legal, o panorama nacional nesta matéria não é, salvo algumas excepções, muito brilhante, estando longe do estipulado regulamentarmente. Consequentemente, para a concepção e dimensionamento de sistemas de distribuição de água é necessário, em geral, um reconhecimento completo da área em estudo, para que se obtenham os elementos de base para a sua elaboração e para a correcta execução da obra.

As plantas topográficas, a escalas adequadas (as escalas mais convenientes são, para efeitos de projecto de execução, as de 1/1 000 e 1/2 000, salvo nos pontos nevrálgicos do sistema, como sejam os locais onde existam infra-estruturas enterradas, onde seja necessário o atravessamento de linhas de água, entre outras, casos em que deve ser utilizada uma escala de 1/500; quando se trate de estudos de planeamento, é admissível a utilização da escala de 1/5 000 ou mesmo 1/10 000), constituem um elemento fundamental no projecto de sistemas de distribuição de água.

No caso de não existirem, é indispensável a realização de trabalhos de campo (nomeadamente levantamentos topográficos para o conhecimento das cotas do terreno, nos pontos altos e baixos, nos arruamentos principais e secundários, não sendo estritamente necessário o conhecimento das linhas de nível, e para a determinação de outras infra-estruturas de subsolo que possam interferir com a rede a projectar), sendo o seu nível de rigor função do tipo de projecto em análise. Nestes trabalhos de campo deve ser recolhida informação relativa à localização de arruamentos (principais e secundários), de edifícios, de parques públicos, de linhas de água, etc..

A partir das plantas topográficas do aglomerado populacional em estudo, é possível proceder ao traçado da rede de distribuição de água, em planta, de acordo com os princípios enunciados no parágrafo anterior. Esta actividade, no âmbito do projecto, deve iniciar-se o mais cedo possível, de forma a que sejam detectadas falhas de informação, as quais devem ser esclarecidas com uma visita ao local e, se necessário, com trabalhos de campo específicos.



3.2 Consumos e caudais de projecto

A determinação dos consumos e dos caudais de projecto de sistemas de distribuição constitui uma actividade vital para efeitos do dimensionamento deste tipo de infra-estruturas. Estes caudais destinam-se a satisfazer os consumos domésticos, comerciais e de serviços, industriais e similares, e públicos; há que garantir, ainda, caudais para fazer face a perdas e fugas e para combate a incêndios.

Dado que esta matéria já foi tratada, em profundidade, no *Documento Sistemas de Abastecimento de Água - Constituição e Bases Quantitativas de Dimensionamento*, remete-se o leitor para aquele documento. No parágrafo seguinte, apenas se discutem alguns aspectos específicos relativos a caudais de ponta em sistemas de distribuição de água.

3.3 Caudais de ponta

Nos sistemas de distribuição de água, para efeitos de dimensionamento, consideram-se os caudais médios previstos no início de exploração (fundamentalmente para efeitos de verificação de velocidades mínimas, aspecto que será discutido mais adiante) e no ano horizonte de projecto, afectados de um factor de ponta instantâneo, a que se adicionam os caudais para fazer face a perdas e fugas.

Nestas condições, o caudal de ponta para satisfazer os consumos domésticos (assim como os consumos que podem ser incorporados nos valores da capitação) é dado pela seguinte expressão:

$$Q_i = f_i \times Q_{ma}$$

sendo:

- Q_i - caudal de ponta instantâneo (L/s)
- f_i - factor de ponta instantâneo (-)
- Q_{ma} - caudal médio para satisfazer os consumos domésticos (L/s)

Como se referiu no *Documento Sistemas de Abastecimento de Água - Constituição e Bases Quantitativas de Dimensionamento*, o factor de ponta (f_i) deve ser determinado, preferencialmente, com base na análise de registos de consumos. No entanto e na ausência de elementos que



permitam a sua determinação mais fundamentada, o factor de ponta pode ser estimado com base na seguinte expressão (Decreto Regulamentar nº 23/95, artigo 19.º):

$$f_i = 2 + 70 / \sqrt{P}$$

em que P é a população a servir.

Os caudais de ponta para satisfazer os consumos comerciais e de serviços, industriais e similares, públicos, de estabelecimentos de ensino, de saúde e prisionais, unidades militares, bombeiros e instalações desportivas (quando não seja aceitável, pela sua dimensão, admitir que os respectivos consumos sejam incorporados nos consumos domésticos), devem ser localizados caso a caso.

Para efeitos de dimensionamento da rede de distribuição, não deve ser somado, aos caudais instantâneos referidos, o caudal instantâneo para o combate a incêndios, uma vez que se admite a não simultaneidade daqueles caudais com este caudal.

4. OUTROS CRITÉRIOS A OBSERVAR

4.1 Critérios relativos ao dimensionamento hidráulico

Nesta matéria, o Decreto Regulamentar nº 23/95, estipula, nos seus artigos 21.º e 22.º , o seguinte:

Artigo 21.º Dimensionamento hidráulico

1 - No dimensionamento hidráulico deve ter-se em conta a minimização dos custos, que deve ser conseguida através de uma combinação criteriosa de diâmetros, observando-se as seguintes regras:

a) A velocidade de escoamento para o caudal de ponta no horizonte de projecto não deve exceder o valor calculado pela expressão:

$$V = 0,127 D^{0,4}$$

onde V é a velocidade limite (m/s) e D o diâmetro interno da tubagem (mm);

b) A velocidade de escoamento para o caudal de ponta no ano de início de exploração do sistema não deve ser inferior a 0,30 m/s e nas condutas onde não seja possível verificar este limite devem prever-se dispositivos adequados para



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

descarga periódica;

c) A pressão máxima, estática ou de serviço, em qualquer ponto de utilização não deve ultrapassar os 600 kPa medida ao nível do solo;

d) Não é aceitável grande flutuação de pressões em cada nó do sistema, impondo-se uma variação máxima ao longo do dia de 300 kPa;

e) A pressão de serviço em qualquer dispositivo de utilização predial para o caudal de ponta não deve ser, em regra, inferior a 100 kPa o que, na rede pública e ao nível do arruamento, corresponde aproximadamente a:

$$H = 100 + 40 n$$

onde H é a pressão mínima (kPa) e n o número de pisos acima do solo, incluindo o piso térreo; em casos especiais, é aceitável uma redução daquela pressão mínima, a definir, caso a caso, em função das características do equipamento.

Artigo 22.º Situações de incêndio

Nas situações de incêndio não é exigível qualquer limitação de velocidades nas condutas e admitem-se alturas piezométricas inferiores a 100 kPa.”

4.2 Diâmetros mínimos

O Decreto Regulamentar nº 23/95, estipula, no seu artigo 23.º, relativamente a diâmetros mínimos, o seguinte:

“1 - Os diâmetros nominais mínimos das condutas de distribuição são os seguintes:

a) 60 mm em aglomerados com menos de 20000 habitantes;

b) 80 mm em aglomerados com mais de 20000 habitantes;

2 - Quando o serviço de combate a incêndios tenha de ser assegurado pela mesma rede pública, os diâmetros nominais mínimos das condutas são em função do risco da zona e devem ser:

a) 80 mm - grau 1;

b) 90 mm - grau 2;

c) 100 mm - grau 3;

d) 125 mm - grau 4;

e) \geq 150 mm (a definir caso a caso) - grau 5.”



4.3 Procedimentos para o cálculo hidráulico de redes de distribuição de água

Após a definição do traçado da rede de distribuição e calculados os caudais de ponta para satisfazer os consumos domésticos, comerciais e de serviços, industriais e similares, públicos, de estabelecimentos de ensino, de saúde e prisionais, unidades militares, bombeiros e instalações desportivas (quando não seja aceitável, pela sua dimensão, admitir que os respectivos consumos sejam incorporados nos consumos domésticos), há que cumprir um conjunto de procedimentos, que a seguir se indicam:

- 1) afectação dos consumos domésticos aos troços/nós do sistema de distribuição de água;
- 2) localização e afectação, a nós de cálculo (ver conceito de nó de cálculo apresentado no parágrafo seguinte), dos consumos comerciais e de serviços, industriais e similares, públicos, de estabelecimentos de ensino, de saúde e prisionais, unidades militares, bombeiros e instalações desportivas, nos casos em que os respectivos consumos não foram incorporados nos consumos domésticos;
- 3) determinação dos comprimentos das tubagens entre nós de cálculo;
- 4) escolha inicial dos diâmetros das tubagens e dos respectivos tipos de materiais;
- 5) determinação das cotas topográficas do terreno nos nós de cálculo;
- 6) definição da localização de reservatórios e/ou estações elevatórias e das respectivas condições de funcionamento hidráulico (cotas dos níveis de água em reservatórios e curvas características dos grupos electrobomba, uma vez que condicionam as cotas piezométricas na rede de distribuição de água);
- 7) cálculo das condições de equilíbrio hidráulico propriamente ditas da rede de distribuição de água (caudais, cotas e alturas piezométricas, e velocidades de escoamento);
- 8) verificação do cumprimento dos critérios regulamentares; caso eles não sejam cumpridos, em particular no que se refere às pressões mínimas e às velocidades, proceder ao ajustamento dos diâmetros e efectuar novo cálculo das condições de equilíbrio hidráulico, e assim sucessivamente;
- 9) verificação das condições de funcionamento hidráulico da rede para o caudal instantâneo a garantir para o combate a incêndios, para os dispositivos do tipo hidrante *hidraulicamente mais afastados*.

Dos procedimentos enumerados anteriormente importa fazer referência a alguns aspectos particulares, que a seguir se discutem.

Numa rede de distribuição de água, em quase todos os troços existem ligações domiciliárias, pelo

que, com todo o rigor, há que contar com caudais progressivamente decrescentes, à medida que se caminha para jusante, sendo comum admitir-se que o caudal é consumido uniformemente ao longo do percurso.

Numa conduta nestas condições, de comprimento L , com caudais Q_0 e Q_1 nos extremos de montante e de jusante, respectivamente, o consumo (total) de percurso é $P = Q_0 - Q_1$ e o consumo uniforme por unidade de percurso é $p = (Q_0 - Q_1)/L$. Neste caso, a perda de carga unitária é decrescente para jusante e a linha de energia é uma parábola, como se ilustra na Figura 3.

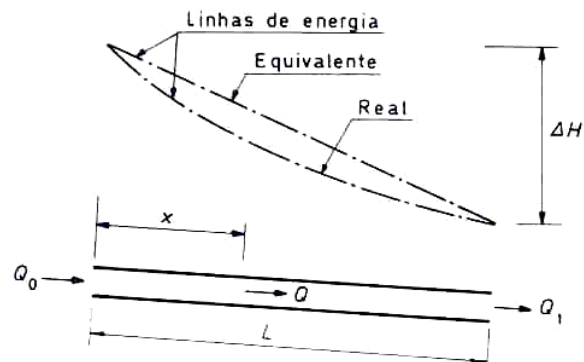


Figura 3 – Definição de caudal equivalente

Pode definir-se um caudal fictício, constante (caudal equivalente, Q_e), que origina a mesma perda de carga total ΔH , com uma perda de carga unitária constante, dada pela expressão:

$$\Delta H = J_e L$$

em que:

- ΔH - perda de carga total
- J_e - perda de carga unitária constante
- L - comprimento do troço

No caso de a perda de carga unitária ser proporcional ao quadrado do caudal (regime turbulento



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

rugoso), o caudal equivalente é dado por:

$$Q_e = Q_1 + 0,55 P$$

Na época em que o cálculo das condições de equilíbrio hidráulico das redes de distribuição de água era feito manualmente (por utilização do método de *Hardy Cross*, único método viável para cálculo manual), as perdas de carga eram avaliadas conforme indicado. Por outro lado, para reduzir o volume de cálculos a efectuar era vulgar proceder a uma simplificação do traçado da rede de distribuição considerando, para efeitos de cálculo, apenas um esqueleto da mesma, que podia ser obtido da seguinte forma:

- desprezando as condutas de muito pequeno diâmetro (até 60 a 80 mm de diâmetro, em sistemas de dimensões médias, ou mesmo até 200 a 250 mm de diâmetro, em grandes sistemas), após um exame cuidadoso;
- desprezando as condutas perpendiculares ao sentido geral do escoamento e com mais ou menos a mesma cota piezométrica desejável nas suas extremidades;
- substituindo os grupos de ramais, com caudais de cálculo pequenos, por um só ramal equivalente.

Com o surgimento dos computadores, em particular dos computadores pessoais, foram sendo desenvolvidos algoritmos de cálculo, utilizando, numa primeira fase (escola francesa), o conceito de caudal equivalente anteriormente referido. No entanto, estes algoritmos apresentavam problemas de estabilidade numérica.

Os algoritmos desenvolvidos pelos *anglo-saxónicos* (Estados Unidos da América e Reino Unido) abandonaram aquela forma de calcular as perdas de carga e passaram a considerar os caudais de percurso nos troços concentrados nos nós. Por exemplo, para um dado troço admitindo que metade do consumo de percurso nesse troço é concentrada no nó de montante e a restante metade no nó de jusante.

Apesar deste procedimento constituir uma simplificação da realidade, a sua adopção permitiu desenvolver algoritmos muito eficientes hoje disponíveis no mercado mundial, que permitem calcular as condições de equilíbrio hidráulico de uma rede de distribuição de água, mesmo de



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

dimensões significativas (elevado número de troços, nós e malhas), em escassos segundos, num computador pessoal.

Um exemplo é o algoritmo (designado por **EPANET** - versão 2.0) disponibilizado, via *Internet*, gratuitamente, pela *Environmental Protection Agency*, dos Estados Unidos da América, organismo federal responsável pelas questões de ambiente (disponível no *site* <http://www.epa.gov/>).

Para terminar este capítulo, resta descrever como pode ser feita a repartição do caudal de ponta para satisfazer os consumos domésticos (assim como os consumos que podem ser incorporados nos valores da capitação) pelos troços da rede de distribuição, de forma a poder concentrá-los nos nós.

Uma das possibilidades, é introduzir o conceito de **comprimento fictício**; com sendo o comprimento que é obtido da seguinte forma:

- o comprimento fictício é igual ao comprimento real do troço ($L_f = L$), nas condutas com serviço de percurso de ambos os lados;
- o comprimento fictício é metade do comprimento real do troço ($L_f = 0,5 L$), nas condutas com serviço de percurso dum só lado;
- o comprimento fictício é nulo para condutas sem serviço de percurso ($L_f = 0$).

A partir da definição dos comprimentos fictícios dos troços, é possível determinar o caudal de percurso unitário, que é o quociente entre o caudal de ponta para satisfazer os consumos domésticos e o somatório dos comprimentos fictícios, ou seja:

$$Q_{\text{percurso}} = Q_p / \sum_{i=1}^n L_{if}$$

sendo:

- Q_{percurso} - caudal de percurso unitário [(L/(s.m))]
- Q_p - caudal de ponta instantâneo (L/s)



- L_{if} - comprimento fictício no troço de tubagem i (m)
 i - número de troços de tubagem na rede de distribuição (-)

Para determinar o caudal consumido num troço de tubagem basta multiplicar o $Q_{percurso}$ pelo comprimento fictício desse troço e, a partir daí, concentrar, por exemplo, metade desse consumo no nó de montante e a restante metade no nó de jusante, como já foi anteriormente referido.

5. FORMULAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO HIDRÁULICO

5.1 Considerações gerais e conceitos

Os sistemas de distribuição de água (e não apenas a rede de distribuição de água) são constituídos um conjunto mais ou menos complexo de tubagens, instalações elevatórias e/ou sobrepressoras, reservatórios e diversos tipos de outros órgãos.

As expressões de avaliação de perdas de carga contínuas estabelecem as relações entre as seguintes cinco variáveis: comprimento, diâmetro, caudal, perda de carga e rugosidade. Em geral, no projecto são conhecidos os comprimentos (determinados pelo traçado da rede) e as rugosidades (determinados pelo tipo de material utilizado), pelo que o engenheiro terá de obter a solução para uma das restantes três. Enquanto que a determinação do caudal e da perda de carga é fundamentalmente um problema hidráulico, a definição do diâmetro é, além disso, um problema económico.

Na maior parte das situações em sistemas de distribuição de água, não se conhecem os caudais nas tubagens; pelo contrário, apenas se conhecem os caudais saídos do sistema e a energia disponível num ou mais pontos de alimentação (reservatórios ou estações elevatórias).

Consequentemente, a determinação das respectivas condições de funcionamento hidráulico consiste no cálculo da distribuição dos caudais nas tubagens e das cotas piezométricas (ou pressão) em cada um dos nós, conhecendo a energia disponível em pelo menos um dos pontos do sistema. O sistema de distribuição considera-se resolvido quando são conhecidas as cotas piezométricas (ou pressões) nos nós e os caudais em todas as tubagens, com o rigor pretendido.

Nas suas linhas gerais, a definição das condições de equilíbrio hidráulico dos sistemas é



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

estabelecida com base nas equações da continuidade e da conservação da energia e, para além disso, numa relação entre caudal e perda de carga, aspectos discutidos no *Documento Sistemas de Adução*. O tipo de técnica exigida para a formulação e obtenção da solução de um dado problema depende, essencialmente, da configuração do sistema de distribuição de água.

Em geral, os aspectos relacionados com a análise de sistemas de distribuição de água podem ser agrupados nas seguintes categorias:

- a) topologia do sistema (ramificados, ramificados com diversos pontos de alimentação, malhados e mistos);
- b) tipo de formulação do problema (equações dos troços, dos nós ou das malhas, como se verá mais tarde);
- c) método utilizado na resolução do sistema de equações (*Hardy-Cross*, *Newton-Raphson*, *Teoria Linear* ou outros);
- d) a forma como a variável tempo é considerada na análise do sistema (permanente, quasi-permanente ou transitório).

A discussão dos aspectos relativos às categorias a que se referem as alíneas a) e b) será feita no presente Capítulo. No Capítulo seguinte, apresentam-se os aspectos relativos à alínea c); no âmbito deste Documento, não serão discutidos, no entanto, os aspectos relativos aos regimes quasi-permanentes e transitórios.

Como se referiu no Capítulo 2, os sistemas de distribuição de água podem ser *malhados* ou *ramificados* (aqui não se referem os sistemas mistos, uma vez que são uma conjugação destes dois).

Nos primeiros (sistemas *malhados*) (Figura 2), há necessidade de utilizar simultaneamente as equações da continuidade e da conservação da energia para a definição das condições de equilíbrio hidráulico, ou seja, para a determinação dos caudais nas tubagens, o que torna esta classe de problemas de mais difícil resolução.

Nos segundos (sistemas *ramificados*) (Figura 1), em que apenas existe um ponto de alimentação do sistema⁽¹⁾ e, por outro lado, não existem malhas (define-se malha como um conjunto de

⁽¹⁾ No âmbito do presente Documento define-se nó de alimentação aquele que tem uma cota piezométrica fixa e através do qual há entrada de caudal no sistema; são exemplos deste tipo de nós os reservatórios e as estações elevatórias.



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

tubagens que formam um circuito fechado), é possível calcular, dados os caudais concentrados nos nós, os respectivos caudais nas tubagens sem ter que resolver a equação da conservação da energia. Neste caso, o cálculo consiste em aplicar o princípio da continuidade aos nós e aplicar uma relação perda de carga / caudal para a determinação das cotas piezométricas nos nós.

Nos sistemas *malhados* incluem-se, não só os sistemas malhados propriamente ditos, mas também aqueles que, não apresentando malhas físicas, englobam, por exemplo, dois (ou mais) pontos de alimentação. Neste último caso, o sistema pode ser idealizado como se fosse constituído por uma malha (designada daqui em diante por *malha imaginária ou fictícia*) formada pelo conjunto de tubagens que unem os dois pontos de alimentação e por uma tubagem fictícia com uma perda de carga exactamente igual à diferença das cotas piezométricas entre aqueles dois pontos.

Este conceito aplica-se, também, aos sistemas malhados que apresentam mais do que um ponto de alimentação, como se ilustra na Figura 2. Neste exemplo, a malha imaginária é formada pelas tubagens reais (1) a (6) e pela tubagem fictícia (7), cuja perda de carga é igual à diferença entre a energia total imediatamente a montante da estação elevatória (E.E.) e a cota do nível de água no reservatório R. Por generalização, o número de malhas imaginárias num dado sistema de distribuição de água é sempre igual ao número de pontos de alimentação existentes menos um.

Resta precisar alguns aspectos da terminologia relativa à configuração dos sistemas de distribuição de água, a qual será utilizada daqui em diante. Assim, as secções terminais de cada tubagem são designadas por nós, os quais podem ser de dois tipos diferentes: os *nós de junção* ou os *nós de cota piezométrica fixa*.

Um *nó de junção* é aquele onde se verifica a união de duas ou mais tubagens ou, ainda, onde ocorre uma saída ou entrada pontual de caudal no sistema. Um *nó de cota piezométrica fixa*, como o próprio nome indica, é aquele em que a cota piezométrica é constante, como por exemplo a ligação a um reservatório.

Para além disso, existem as malhas que, como se referiu anteriormente, podem ser definidas como o conjunto de tubagens que formam um circuito fechado no sistema de distribuição. De entre estas, há que distinguir, ainda, as malhas naturais, como sendo as que não contêm



nenhuma outra no seu interior.

Para um sistema de distribuição de água constituído por **T** tubagens, **N** nós de junção e **F** nós de cota piezométrica fixa verifica-se que o número de malhas naturais (**M**) pode ser calculado através da seguinte relação fundamental (ver exemplo nas Figuras 1 e 2):

$$M = T - N - (F - 1) \quad [1]$$

5.2 Estações elevatórias e sobrepessoras

5.2.1 Conceitos fundamentais e curvas características dos grupos electrobomba⁽²⁾

As estações elevatórias e sobrepessoras constituem órgãos ou elementos especiais que, devido ao modo como funcionam e à sua importância em termos energéticos, requerem um tratamento particular quando se pretende formular matematicamente um sistema de distribuição de água. No presente parágrafo, apresentam-se e discutem-se os métodos correntemente utilizados para representar este tipo de elementos especiais na perspectiva da moderação matemática dos sistemas. Dado que na grande maioria dos sistemas de distribuição de água, as bombas instaladas são centrífugas (ou radiais), a apresentação que se segue abrange apenas este tipo.

Define-se capacidade nominal de um grupo electrobomba como o par de valores altura de elevação (**H**) e caudal (**Q**) para o rendimento máximo; para caudais superiores ou inferiores a **Q**, o correspondente rendimento da bomba é sempre menor do que aquele valor máximo. Por outro lado, a relação entre a altura de elevação e o caudal, $H = f(Q)$, para o número de rotações do respectivo motor, designa-se usualmente por *curva característica do bomba* (Figura 4).

Para determinar o ponto para o qual a bomba irá funcionar, é necessário determinar a *resistência* que a bomba deve vencer. No entanto, como esta resistência depende do caudal escoado, é indispensável, ainda, definir a chamada *curva característica do sistema*, a qual representa a relação entre o caudal e a energia necessária para elevar a água, vencer as perdas de carga nas tubagens de aspiração e impulsão e, ainda, para manter as pressões desejadas a jusante ou atingir as cotas em reservatórios.

⁽²⁾ Neste parágrafo apresentam-se estritamente os conceitos essenciais do funcionamento hidráulico de bombas para efeitos de formulação matemática de sistemas de distribuição de água.

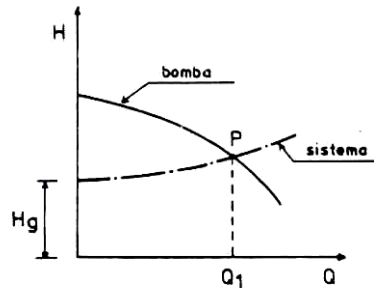


Figura 4- Curvas características da bomba e do sistema - ponto de funcionamento da bomba

Estas curvas podem ser obtidas pela aplicação do teorema de *Bernoulli* entre dois pontos 1 e 2 (por exemplo, dois reservatórios), o que corresponde à aplicação da seguinte expressão:

$$E_b = z_2 - z_1 + (p_2 - p_1) / \gamma + \Delta H \quad [2]$$

sendo:

- E_b - altura de elevação exigida à bomba
- z_2 - cota no ponto 2 (jusante)
- z_1 - cota no ponto 1 (montante)
- p_2 - pressão no ponto 2
- p_1 - pressão no ponto 1
- ΔH - perda de carga total entre os pontos 1 e 2 (incluindo as contínuas e localizadas)
- γ - peso volúmico do fluido

Na expressão anterior, enquanto que os termos correspondentes às cotas não dependem do caudal, a mesma não se passa relativamente a ΔH que, pelo contrário, é muito dependente daquela variável. Na Figura 5, apresentam-se alguns exemplos ilustrativos do conceito desenvolvido. Por vezes, a expressão [2] é apresentada da seguinte forma alternativa.

$$E_b = H_g + \Delta H = H_g + K Q^n \quad [3]$$



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

sendo H_g a altura geométrica de elevação e K o coeficiente de perda de carga.

O ponto de intersecção, no plano (Q, H) da curva característica da bomba, $H = f(Q)$, para o número de rotações do respectivo motor, com a curva (curva característica do sistema) que exprime, em função do caudal, a altura total de elevação exigida pela instalação, designa-se por *ponto de funcionamento* (ponto P na Figura 4).

No entanto, para determinar numérica ou analiticamente o ponto de funcionamento da bomba na perspectiva da modelação matemática de sistemas de distribuição de água, é conveniente representar a curva característica da bomba por uma expressão. Para este fim, têm sido utilizados pelos diversos autores três métodos alternativos, os quais são conceptualmente muito semelhantes. Todos eles determinam a expressão de curva característica da bomba, a partir de três pares de valores (Q_1, H_1) , (Q_2, H_2) e (Q_3, H_3) com base em técnicas de aproximação polinomial.

Assim, nos dois primeiros métodos considera-se que a curva característica da bomba pode ser aproximada por uma parábola, como a seguir se indica:

$$E_b = A Q^2 + B Q + C \quad [4]$$

sendo:

- Q - caudal bombado
- A, B - coeficientes de regressão
- C - altura de elevação em vazio

Estes dois primeiros métodos apenas diferem na forma como é feita a aproximação polinomial, ou seja, a determinação dos parâmetros A e B e o valor de C, a partir dos três pares de valores (Q, H) .

No primeiro método, os valores de A, B e C são calculados a partir duma aproximação polinomial com base em três pares de valores arbitrários (Q, H) , através das seguintes expressões:

$$X1 = H_1 / [(Q_1 - Q_2) (Q_1 - Q_3)] \quad [5]$$

$$X2 = H_2 / [(Q_2 - Q_1) (Q_2 - Q_3)] \quad [6]$$

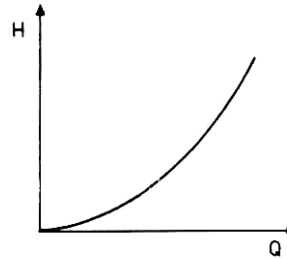
$$X3 = H_3 / [(Q_3 - Q_1) (Q_3 - Q_2)] \quad [7]$$

$$A = X1 + X2 + X3 \quad [8]$$

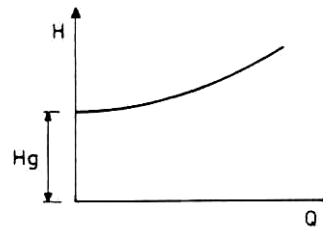
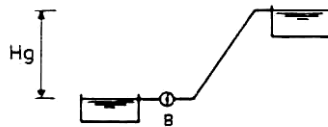
$$B = X1 (Q_2 + Q_3) - X2 (Q_1 + Q_3) - X3 (Q_1 + Q_2) \quad [9]$$

$$C = X1 (Q_2 Q_3) + X2 (Q_1 Q_3) + X3 (Q_1 Q_2) \quad [10]$$

1) Tubagem longa sem inclinação



2) Tubagem curta; grande altura de elevação



3) Escoamento por gravidade e bombagem

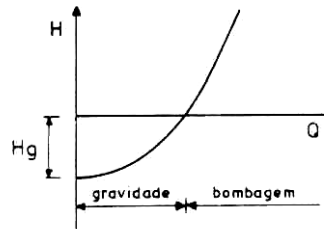
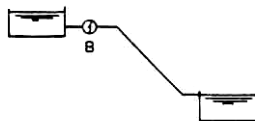


Figura 5- Exemplos de curvas características do sistema (adaptado de Walski, 1984)

Neste método, há que ter certas precauções na forma como são escolhidos os pares de valores (Q, H), uma vez que fora do intervalo $[Q_1, Q_3]$ a aproximação polinomial apresentada pode conduzir a resultados incorrectos. De facto, mesmo que a escolha dos pares de valores (Q, H) seja tal que o caudal bombado para as condições de equilíbrio hidráulico do sistema de distribuição caia dentro do intervalo $[Q_1, Q_3]$, pode acontecer que ao longo do processo iterativo do



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

procedimento numérico de resolução do sistema de equações ocorram situações em que essa condição não se verifique. Este facto pode conduzir a instabilidades numéricas ou à divergência do procedimento numérico. Este aspecto pode ser ultrapassado, na maioria dos casos, desde que a escolha do par (Q_1, H_1) corresponda a valores iguais ou muito próximos da altura de elevação em vazio.

No sentido de ultrapassar automaticamente este aspecto, a segundo método consiste num processo simples de calcular os parâmetros A e B conhecendo a altura de elevação em vazio (C) e dois outros pares de valores (Q_2, H_2) e (Q_3, H_3) . Nestas condições, o parâmetro B pode ser determinado pela expressão:

$$B = [(H_3 - C) - (H_2 - C) (Q_3 / Q_2)^2] / [Q_3 - Q_2 (Q_3 / Q_2)^2] \quad [11]$$

Uma vez conhecido o parâmetro B, o valor de A pode ser obtido da seguinte forma:

$$A = (H_2 - C - Q_2 B) / Q_2^2 \quad [12]$$

Neste segundo método, os coeficientes podem ser calculados, em alternativa, por um processo gráfica, dividindo a expressão [4] por Q e traçando Q em função de $(H - C) / Q$. Obtém-se, assim, uma recta cuja inclinação e ordenada na origem representam A e B, respectivamente.

No terceiro método considera-se que a curva característica da bomba é aproximada por uma expressão do seguinte tipo (Figura 6):

$$E_b = C - A Q^n \quad [13]$$

sendo A e n parâmetros calculados fazendo passar a curva pelos pares de valores (Q_2, H_2) e (Q_3, H_3) . As expressões para o cálculo de A e n são as que a seguir se indicam:

$$n = \log [(C - H_3) / (C - H_2)] / \log (Q_3 / Q_2) \quad [14]$$

$$A = (C - H_2) / Q_2^n \quad [15]$$

A expressão [13] é válida para o domínio $0 \leq Q \leq Q_3$. No entanto, para valores de caudal acima de

Q_3 , a curva característica da bomba é aproximada por uma recta da seguinte forma:

$$E_b = B + S Q \quad [16]$$

sendo S e B calculados pelas expressões:

$$S = -n A Q_3^{n-1} \quad [17]$$

$$B = H_3 - S Q_3 \quad [18]$$

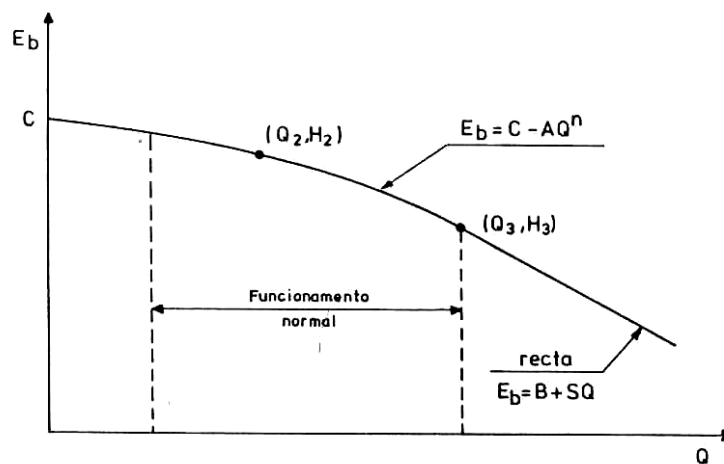


Figura 6- Curva característica da bomba - terceiro método

EXEMPLO

Considere-se que a curva característica de um grupo electrobomba é definida pelos seguintes pares de valores (Q, H):

$$Q_1 = 0,025 \text{ m}^3/\text{s}; \quad H_1 = 12,0 \text{ m}$$

$$Q_2 = 0,040 \text{ m}^3/\text{s}; \quad H_2 = 10,5 \text{ m}$$

$$Q_3 = 0,055 \text{ m}^3/\text{s}; \quad H_3 = 8,0 \text{ m}$$

Sabendo que a altura de elevação em vazio é de 12,28 m, determinar as expressões matemáticas da curva característica pelos três métodos apresentados anteriormente. Para o segundo método,



determinar, ainda, os parâmetros A e B pelo processo gráfico.

Método 1

Neste caso, substituindo directamente os valores nas expressões [5] a [10], obtém-se:

$$X_1 = 12,0 / [(0,025 - 0,040) (0,025 - 0,055)] = 26666,67$$

$$X_2 = 10,5 / [(0,040 - 0,025) (0,040 - 0,055)] = - 46666,67$$

$$X_3 = 8,0 / [(0,055 - 0,025) (0,055 - 0,040)] = 17777,78$$

$$A = 26666,67 - 46666,67 + 17777,78 = - 2222,22$$

$$B = - 26666,67 (0,040 + 0,055) + 46666,67 (0,025 + 0,055) - 17777,78 (0,025 + 0,040) = 44,444$$

$$C = 26666,67 (0,040 \times 0,055) - 46666,67 (0,025 \times 0,055) + 17777,78 (0,025 \times 0,040) = 12,28$$

Consequentemente, a expressão matemática da curva característica é a seguinte:

$$E_b = - 2222,22 Q^2 + 44,444 Q + 12,28$$

Método 2 (analiticamente)

Substituindo directamente os valores nas expressões [11] e [12], obtém-se:

$$B = [(8,0 - 12,28) - (10,5 - 12,28) (0,055 / 0,040)^2] / [0,055 - 0,040 (0,055 / 0,040)^2] = 44,348$$

$$A = (10,5 - 12,28 - 0,040 \times 44,348) / 0,040^2 = - 2221,21$$

pelo que a expressão matemática da curva característica é a seguinte:

$$E_b = - 2221,21 Q^2 + 44,348 Q + 12,28$$

Método 2 (graficamente)

Dado que $C = 12,28$ m, é possível obter o quadro de valores de Q e $(H - C) / Q$ que a seguir se indica:

Q	H	(H - C) / Q
0,025	12,0	- 11,2
0,040	10,5	- 44,5
0,055	8,0	- 77,82

Na Figura 7, apresenta-se o traçado gráfico de Q em função de (H - C) / Q, o que permite calcular $B \approx 44$ (ordenada na origem). A inclinação da recta (parâmetro A) pode ser calculada como se segue:

$$A = (- 11,2 + 77,82) / (0,025 - 0,055) = - 2220,67$$

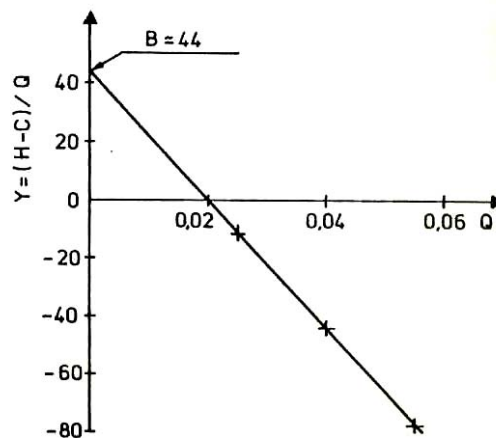


Figura 7- Curva característica da bomba - método gráfico

Método 3

Os parâmetros n e A são calculados substituindo os correspondentes valores nas expressões [14] e [15], obtendo-se:

$$n = \log [(12,28 - 8,0) / (12,28 - 10,5)] / \log (0,055 / 0,040) = 2,755$$

$$A = (12,28 - 10,5) / 0,040^{2,755} = 12639,93$$

Por outro lado, os parâmetros S e B são calculados substituindo os valores nas expressões [17] e [18], obtendo-se:



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

$$S = -2,755 \times 12639,93 \times 0,055^{1,755} = -214,39$$

$$B = 8,0 + 214,39 \times 0,055 = 19,79$$

Nestas condições, as expressões matemáticas da curva característica são as seguintes:

$$E_b = 12,28 - 12639,93 Q^{2,755} \text{ (para } 0 < Q < Q_3)$$

$$E_b = 19,79 - 214,39 Q \text{ (para } Q > Q_3)$$

Uma vez conhecidas as curvas características da bomba e do sistema, o ponto de funcionamento pode ser calculado igualando as expressões [3] e [4] ou [13]. No caso de se utilizar a expressão [4], obtém-se a seguinte equação na forma implícita:

$$AQ^2 + BQ + C - H_g - K Q^n = F(Q) = 0 \quad [19]$$

cujos símbolos têm o significado já anteriormente apresentado. No caso do expoente n ser diferente de 2 (por exemplo, para a expressão de *Hazen - Williams* $n = 1,852$), a equação [19] não é explicitável em ordem a Q .

Nestas condições, há que usar um processo numérico iterativo para calcular a raiz da equação (método de *Newton*), cuja expressão de recorrência é a seguinte:

$$Q_{i+1} = Q_i - F(Q_i) / F'(Q_i) \quad [20]$$

sendo:

Q_{i+1} - caudal na iteração de ordem $(i + 1)$

Q_i - caudal na iteração de ordem (i)

$F(Q_i)$ - valor da função $F(Q)$ para $Q = Q_i$

$F'(Q_i)$ - valor da derivada da função $F(Q)$ para $Q = Q_i$

Achando a derivada da equação [19] e substituindo $F(Q)$ e $F'(Q)$ na expressão de recorrência [20], obtém-se:

$$Q_{i+1} = Q - \frac{AQ^2 + BQ + C - H_g - KQ^n}{2AQ + B - nKQ^{n-1}} \quad [21]$$

Note-se que na expressão anterior, por simplicidade de simbologia, foi omitido o índice i dos termos correspondentes a Q .

5.2.2 Associação de bombas em paralelo e série

Em sistemas de distribuição de água, são raras as situações em que na estação elevatória ou sobressora apenas existe instalado um grupo electrobomba. Pelo contrário, a situação mais corrente consiste em associar duas ou mais bombas funcionando em paralelo, sendo o seu número seleccionado, em cada caso, não só em termos de custo, mas também da fiabilidade do sistema.

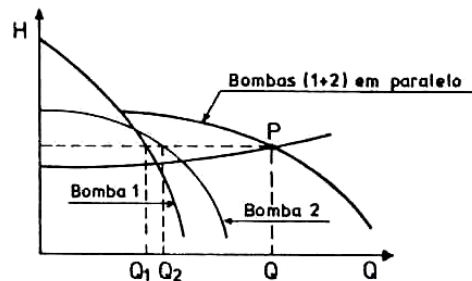


Figura 8- Associação de bombas em paralelo

Para além disso, é habitual instalar nas estações elevatórias grupos de reserva, os quais se destinam a substituir os que estão em funcionamento, em caso de avaria destes. Em situações especiais, principalmente para vencer grandes alturas de elevação, ainda se podem associar bombas em série.

Se duas (ou mais) bombas funcionam em paralelo, a curva característica do conjunto obtém-se somando as abcissas das curvas características $H = f(Q)$ correspondentes, para cada bomba, a uma mesma altura total de elevação (Figura 8).

Na associação de bombas em série, a curva característica do conjunto é dada pela soma das

ordenadas das curvas $H = f(Q)$ correspondentes, para cada bomba, a um mesmo caudal (Figura 9).

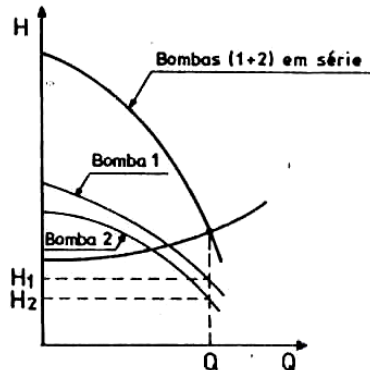


Figura 9- Associação de bombas em série

Em ambos os casos, o ponto de funcionamento é dado pela intersecção das curvas características conjunto das bombas e do sistema (ponto P das figuras referidas).

5.3 Equações fundamentais de equilíbrio hidráulico

5.3.1 Introdução

A análise do equilíbrio hidráulico de sistemas de distribuição de água malhados é baseada, como já anteriormente referido, nas duas leis fundamentais da mecânica dos fluidos, a da continuidade e a da conservação da energia, e, para além disso, numa relação entre o caudal (ou velocidade) e a perda de carga (ou variação de pressão), estabelecida através das equações de *Darcy - Weisbach* (associada à equação implícita de *Colebrook - White*), *Manning - Strickler* ou *Hazen - Williams*.

Em termos gerais, esta análise requer a resolução de um sistema de equações não - lineares frequentemente com um elevado número de incógnitas, dependendo a sua dimensão da complexidade do sistema de distribuição de água em jogo.

A formulação matemática deste tipo de problemas pode ser dividida em duas etapas, a saber:

- a primeira, compreende a formulação do problema, isto é, o desenvolvimento do sistema de



equações de forma a que o número de incógnitas iguale o número de equações independentes;

- a segunda, consiste na resolução do sistema resultante utilizando um procedimento numérico adequado.

No presente Capítulo, desenvolvem-se as metodologias disponíveis relativas à primeira etapa, remetendo-se para o Capítulo 8 a discussão dos procedimentos numéricos de resolução.

Na primeira etapa, ou seja, na formulação matemática das condições de equilíbrio hidráulico do sistema de distribuição de água, em regime permanente, é possível equacionar o problema por três vias alternativas.

- a) **equações dos troços**, que consiste em escrever as equações da continuidade (lei dos nós) e da conservação da energia (lei das malhas), em termos do caudal em cada tubagem (Q);
- b) **equações dos nós**, que consiste em escrever apenas as equações da continuidade, em termos das cotas piezométricas nos nós de junção (H);
- c) **equações das malhas**, que consiste em escrever as equações da conservação da energia, em termos das correcções de caudal em cada malha do sistema, natural ou imaginária (ΔQ).

Nos parágrafos que se seguem analisam-se e discutem-se, primeiramente, as três vias alternativas de formulação enunciadas, definindo-se, para cada um dos casos, as equações básicas do equilíbrio hidráulico dos sistemas, que englobem, para além do conjunto de tubagens, elementos especiais do tipo estações elevatórias ou sobrepessoras e reservatórios. Apresenta-se, para cada um dos casos, um exemplo de aplicação.

5.3.2 Equações dos troços

A formulação do equilíbrio hidráulico no caso das equações dos troços consiste em considerar como incógnitas do problema os caudais nos troços (Q), escrevendo uma equação de continuidade por cada nó de junção e uma equação de conservação da energia por cada malha natural e imaginária do sistema de distribuição. Nestas condições, e tendo presente a relação fundamental [1], é possível escrever tantas equações da continuidade e da conservação da



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

energia quantas as tubagens que constituem o sistema.

Para cada nó de junção, e apenas para os nós deste tipo, as equações de continuidade podem ser traduzidas pela seguinte expressão:

$$\sum_{j=1}^{NC} Q_{ji} = Q_i \quad (N \text{ equações}) \quad [22]$$

sendo:

- Q_{ji} - caudal convergente no nó i a partir do nó j
- NC - número de tubagens convergentes no nó i
- Q_i - caudal saído (consumo concentrado no nó) no nó de junção i (negativo se se tratar de entrada de caudal)

Para cada uma das malhas naturais, as equações da conservação da energia podem ser traduzidas pela seguinte expressão:

$$\sum_{\ell=1}^{NT} \Delta H_{\ell} - \sum_{j=1}^{NB} E_{bj} = 0 \quad (M \text{ equações}) \quad [23]$$

sendo:

- ΔH_{ℓ} - perda de carga total da tubagem de ordem ℓ pertencente à malha para a qual está a ser escrita a equação, incluindo as perdas de carga localizadas
- E_{bj} - energia fornecida ao sistema nessa malha pela estação elevatória ou sobreprensa j
- NT - número de tubagens na malha
- NB - número de estações elevatórias ou sobreprensoras na malha

Por outro lado, se existirem F nós de cota piezométrica fixa, podem ser definidas $(F - 1)$ equações independentes da conservação da energia, para os percursos entre dois nós de cotas piezométricas fixas (por exemplo, entre dois reservatórios ou entre um reservatório e uma estação elevatória), com a seguinte forma:



$$\sum_{\ell=1}^{NT} \Delta H_{\ell} - \sum_{j=1}^{NB} E_{bj} = \Delta E \quad (F - 1 \text{ equações}) \quad [24]$$

sendo ΔE a diferença de cotas piezométricas entre os dois nós considerados e os restantes símbolos têm o significado anteriormente referido. Note-se que a equação [23] pode ser considerada como um caso particular da equação [24], em que ΔE é zero para uma malha natural.

As equações da conservação da energia (equações [23] e [24]) podem ser expressas em função dos caudais nas tubagens, os quais constituem as incógnitas do problema, da forma que a seguir se indica. A perda de carga total numa tubagem ℓ do sistema de distribuição pode ser expressa em termos do caudal Q_{ℓ} e do respectivo coeficiente de perda de carga da tubagem K_{ℓ} (função do comprimento, do diâmetro arbitrado e do coeficiente de rugosidade), através da seguinte expressão⁽³⁾:

$$\Delta H_{\ell} = K_{\ell} Q_{\ell}^n = K_{\ell} Q_{\ell} |Q_{\ell}|^{n-1} \quad [25]$$

Nesta formulação, assim como nas restantes, é fundamental definir o sentido de escoamento em relação ao qual o caudal é considerado como positivo (sentido directo ou retrógrado para as malhas naturais ou, ainda, no sentido da cota piezométrica mais elevada para a mais baixa, no caso das malhas imaginárias). Na expressão [25] ao escrever-se $Q_{\ell} |Q_{\ell}|^{n-1}$ pretende-se atingir o objectivo referido. Uma via alternativa de concretizar o mesmo objectivo, consiste em escrever estes termos sob a forma $\text{sgn } Q |Q|^n$, atribuindo-se a $(\text{sgn } Q)$ o valor + 1 se $Q > 0$ e -1, no caso contrário. Por exemplo, se $Q = -5 \text{ L/s}$ e $n = 2$ (fórmula de *Manning - Strickler*), $\text{sgn } (-5) |-5|^2 = (-1)(25) = -25 \text{ L/s}$.

Por outro lado, como se referiu anteriormente, as curvas características dos grupos electrobomba das estações elevatórias ou sobressoras podem ser aproximadas por uma equação quadrática (obtida pelas técnicas descritas no parágrafo anterior, a partir de pares de valores (Q, H)) do seguinte tipo:

⁽³⁾ $K = (10,29 \text{ L}) / (K_s^2 D^{16/3})$ para a expressão de Manning-Strickler ($n = 2$)
 $K = (10,70 \text{ L}) / (C^{1,852} D^{4,87})$ para a expressão de Hazen-Williams ($n = 1,852$)

sendo:

D - diâmetro da tubagem (m)

L - comprimento da tubagem (m)

K_s, C - coeficientes de rugosidade, respectivamente de *Manning-Strickler* e de *Hazen-Williams*.



$$E_b = A Q^2 + BQ + C \quad [26]$$

sendo E_b a energia fornecida ao sistema pela estação elevatória ou sobreprensa, Q o caudal que passa pelas bombas e A , B e C parâmetros.

Substituindo as expressões do tipo [25] e [26] nas equações [23] e [24] anteriores, obtém-se um conjunto de equações não-lineares, as quais incluem apenas os caudais nas tubagens do sistema de distribuição, que constituem as incógnitas do problema. Na sua globalidade, este problema resume-se, de facto, à resolução de um sistema de equações com N equações lineares (continuidade nos nós de junção) e $[M + (F - 1)]$ equações não-lineares com T incógnitas.

EXEMPLO

Neste exemplo de aplicação, ilustra-se o desenvolvimento dos princípios enunciados, relativos à formulação do equilíbrio hidráulico através das equações dos troços. Para o efeito, considere-se o sistema de distribuição esquematizado na Figura 10, constituído por 8 tubagens, 5 nós de junção, dois nós de alimentação (um reservatório e uma estação elevatória), cujas características se apresentam na mesma figura, e uma válvula de seccionamento inserida na tubagem 3. Neste caso, as condições de equilíbrio hidráulico são traduzidas, por um lado, pelas 5 equações lineares correspondentes ao princípio da continuidade para os 5 nós de junção do sistema, e que são as seguintes:

$$\begin{aligned} F_1 &= Q_1 - Q_4 - Q_7 + 0,03 = 0; \quad F_2 = Q_5 + Q_2 - Q_1 + 0,035 = 0 \\ F_3 &= Q_6 - Q_2 - Q_3 + 0,04 = 0; \quad F_4 = Q_3 + Q_4 - Q_8 + 0,0 = 0 \\ F_5 &= -Q_5 - Q_6 + 0,04 = 0 \end{aligned} \quad [27]$$

Por outro lado, existem três equações da conservação da energia (duas para as malhas naturais I e II e uma para a malha imaginária III) traduzidas pelas seguintes expressões⁽⁴⁾:

$$\begin{aligned} F_6 &= K_1 \operatorname{sgn} Q_1 |Q_1|^2 + K_2 \operatorname{sgn} Q_2 |Q_2|^2 + (K_3 + 2/2g A_3^2) \operatorname{sgn} Q_3 |Q_3|^2 + \\ &\quad + K_4 \operatorname{sgn} Q_4 |Q_4|^2 = 0 \\ F_7 &= K_5 \operatorname{sgn} Q_5 |Q_5|^2 + K_6 \operatorname{sgn} Q_6 |Q_6|^2 + K_2 \operatorname{sgn} Q_2 |Q_2|^2 = 0 \end{aligned}$$

⁽⁴⁾ Com base na fórmula de Manning-Strickler ($n = 2$).



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

$$F_8 = K_7 \operatorname{sgn} Q_7 |Q_7|^2 - E_b + K_4 \operatorname{sgn} Q_4 |Q_4|^2 + K_8 \operatorname{sgn} Q_8 |Q_8|^2 + 10 = 0 \quad [28]$$

Nestas expressões Q_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, 8$) são os caudais nas tubagens, ou sejam, as incógnitas do problema, K_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, 8$) os respectivos coeficientes de perda de carga, cujos valores constam na Figura 10, A_3 a área da secção transversal da tubagem 3 e E_b a energia fornecida ao sistema pela estação elevatória B1. Note-se que, relativamente à tubagem 3, pelo facto de existir uma válvula de seccionamento o correspondente coeficiente de perda de carga é acrescido do valor $K_L / 2 g A_3^2$ ($K_L = 2$).

Para completar a formulação do sistema de equações anterior, resta discutir o termo E_b da equação da conservação da energia para a malha imaginária III, que a seguir se apresenta. Como se referiu anteriormente, para quantificar a energia (E_b) fornecida ao sistema por estações elevatórias ou sobreprensoras, é habitual aproximar as curvas características dos grupos electrobomba por uma equação quadrática do tipo da expressão [26].

No entanto, a substituição directa desta expressão nas equações [28], embora definisse o sistema de equações totalmente em termos das incógnitas Q , não permitia garantir a sua convergência numérica, e essa convergência, quando conseguia, seria atingida lentamente.

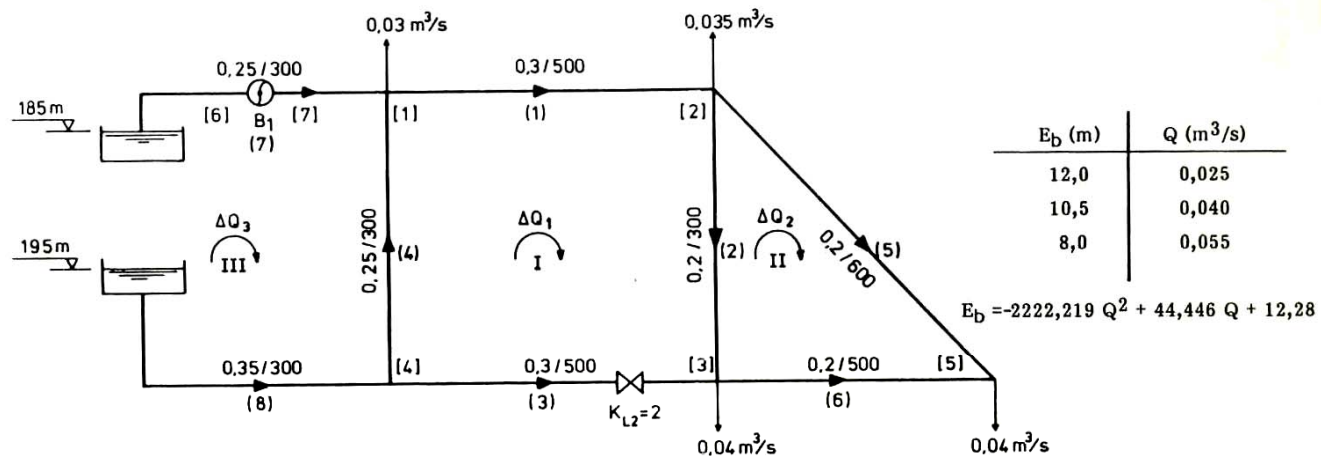
Para melhorar esta situação, torna-se necessário proceder a uma transformação de variáveis, descrita pela primeira vez por JEPSON E TRAVALLEE 1975, de tal forma que a incógnita que substitui E_b tenha um expoente da mesma ordem de grandeza do n ($n = 2$, neste caso). Esta transformação é a seguinte:

$$G = Q + (B / 2A) \quad [29]$$

sendo G a nova variável e A e B os parâmetros da equação [26].

Para justificar a adequação da expressão [29], explicita-se Q em função de G e $B / 2A$ e substitui-se na equação [26]. A expressão resultante é a seguinte⁽⁵⁾:

⁽⁵⁾ Neste exemplo $A = -2222,219$; $B = 44,446$ e $C = 12,28$ (ver Figura 10).



Nota: Os nós [6] e [7] apenas são utilizados nas equações dos nós

- 0,25/300 - Diâmetro (m)/comprimento (m) $K_i = (10,29 L_i)/(K_{si}^2 D_i^{16/3})$
 [1] - Número do nó de junção
 (1) - Número da tubagem
 Ⓢ - Instalação elevatória
 ⊗ - Válvula de seccionamento
- $K_1 = 562,27$; $K_2 = 2932,45$; $K_3 = 562,27$; $K_4 = 892,03$
 $K_5 = 5864,90$; $K_6 = 4887,42$; $K_7 = 892,03$; $K_8 = 148,22$

Figura 10- Representação esquemática do sistema de distribuição



$$E_b = A G^2 + H_0 \quad (\text{com } H_0 = C - B^2 / 4A) \quad [30]$$

Embora esta substituição introduza uma nova incógnita (G), o problema pode ser ultrapassado pela consideração de uma equação linear adicional (com base na equação de transformação [29]):

$$F_9 = G - Q_7 - (B / 2A) = 0 \quad [31]$$

Em termos gerais, por cada estação elevatória inserida no sistema de distribuição é necessário considerar uma variável adicional e uma equação linear complementar do tipo referido em [31].

5.3.3 Equações dos nós

Para o caso das equações dos nós, a análise é baseada em termos das cotas piezométricas em cada nó de junção do sistema de distribuição, que constituem as incógnitas, por combinação da equação da energia para cada tubagem com a equação, da continuidade para cada nó.

Como se viu anteriormente, a equação da perda de carga total para uma tubagem entre os nós j e i é dada por $\Delta H_{ji} = K_{ji} Q_{ji}^{\eta_{ji}}$ ⁽⁶⁾, a qual pode ser escrita, em alternativa, da seguinte forma:

$$H_j - H_i = K_{ji} \operatorname{sgn} Q_{ji} |Q_{ji}|^{\eta_{ji}} \quad [32]$$

sendo:

- H_j, H_i - cotas piezométricas nos nós de junção j e i , respectivamente
- K_{ji} - coeficiente de perda de carga na tubagem do nó j para o nó i
- Q_{ji} - caudal escoado na tubagem do nó j para o nó i
- η_{ji} - expoente da fórmula de perda de carga na tubagem do nó j para o nó i

Por outro lado, uma vez que a perda de carga é do mesmo sinal do sentido do escoamento, o que equivale a $\operatorname{sgn} Q_{ji} = \operatorname{sgn} (H_j - H_i)$, a expressão anterior pode ser resolvida em ordem a Q , obtendo-

⁽⁶⁾ Note-se que esta notação é diferente da antecedente, uma vez que para este caso as tubagens são designadas pelos índices dos nós a montante (j) e jusante (i), enquanto que anteriormente aquelas foram definidas pelo respectivo número de ordem.



-se:

$$Q_{ji} = \text{sgn}(H_j - H_i) (|H_j - H_i| / K_{ji})^{1/n_{ji}} \quad [33]$$

Nesta expressão, considera-se que não existem estações elevatórias ou sobrepessoras na respectiva tubagem. Substituindo a expressão [33] na equação da continuidade [22], obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{NC} \text{sgn}(H_j - H_i) (|H_j - H_i| / K_{ji})^{1/n_{ji}} = Q_i \quad (N \text{ equações}) \quad [34]$$

que representa a equação da continuidade para o nó de junção i , no qual convergem NC tubagens, em termos da cota piezométrica em i (H_i) e das cotas piezométricas nos nós adjacentes j (H_j), com $j = 1, 2, \dots, NC$.

No caso de existirem estações elevatórias ou sobrepessoras no sistema de distribuição, estas são consideradas na formulação matemática do problema por ampliação do conjunto de equações anteriores, criando dois nós de junção adicionais, imediatamente a montante e jusante da correspondente estação elevatória ou sobrepessora.

Desta forma, podem ser escritas duas equações adicionais expressas em termos das cotas piezométricas a montante e a jusante da estação elevatória ou sobrepessora (que são novas incógnitas) e das cotas piezométricas dos correspondentes nós adjacentes.

A primeira equação define o princípio da continuidade do caudal nas tubagens a montante e a jusante da estação (utilizando expressões do tipo da equação [22]), enquanto que a segunda traduz a variação de energia que ocorre pela passagem do caudal na estação elevatória ou sobrepessora.

Na sua globalidade, a formulação das condições de equilíbrio hidráulico de um sistema de distribuição de água com N nós de junção e NB estações elevatórias e/ou sobrepessoras, através das equações dos nós, resume-se, de facto, à resolução de um sistema de $N + 2 NB$ equações não - lineares.

EXEMPLO

Para ilustrar o desenvolvimento dos princípios enunciados anteriormente, considere-se o sistema de distribuição de água do exemplo anterior, cuja esquematização se apresenta na Figura 10. Neste caso, as equações que traduzem o equilíbrio hidráulico do sistema são as seguintes⁽⁷⁾:

$$F_1 = \operatorname{sgn}(H_2 - H_1) (|H_2 - H_1| / K_1)^{0.5} + \operatorname{sgn}(H_4 - H_1) (|H_4 - H_1| / K_4)^{0.5} + \\ + \operatorname{sgn}(H_7 - H_1) (|H_7 - H_1| / K_7'')^{0.5} - 0,030 = 0 \quad (\text{nó 1})$$

$$F_2 = \operatorname{sgn}(H_1 - H_2) (|H_1 - H_2| / K_1)^{0.5} + \operatorname{sgn}(H_3 - H_2) (|H_3 - H_2| / K_2)^{0.5} + \\ + \operatorname{sgn}(H_5 - H_2) (|H_5 - H_2| / K_5)^{0.5} - 0,035 = 0 \quad (\text{nó 2})$$

$$F_3 = \operatorname{sgn}(H_2 - H_3) (|H_2 - H_3| / K_2)^{0.5} + \operatorname{sgn}(H_4 - H_3) (|H_4 - H_3| / K_3')^{0.5} + \\ + \operatorname{sgn}(H_5 - H_3) (|H_5 - H_3| / K_6)^{0.5} - 0,040 = 0 \quad (\text{nó 3})$$

$$F_4 = \operatorname{sgn}(H_1 - H_4) (|H_1 - H_4| / K_4)^{0.5} + \operatorname{sgn}(H_3 - H_4) (|H_3 - H_4| / K_3')^{0.5} + \\ + \operatorname{sgn}(195 - H_4) (|195 - H_4| / K_8)^{0.5} - 0,000 = 0 \quad (\text{nó 4})$$

$$F_5 = \operatorname{sgn}(H_2 - H_5) (|H_2 - H_5| / K_5)^{0.5} + \\ + \operatorname{sgn}(H_3 - H_5) (|H_3 - H_5| / K_6)^{0.5} - 0,04 = 0 \quad (\text{nó 5}) \quad [35]$$

Nas equações anteriores, H_i ($i = 1, 2, \dots, 5$ e 7) são cotas piezométricas nos nós de junção, ou seja, incógnitas do problema e K_ℓ ($\ell = 1, 2, 4, 5, 6$ e 8) os coeficientes de perda de carga nas tubagens respectivas. Para além disso, K_7'' é o coeficiente de perda de carga correspondente ao comprimento da tubagem 7 entre a estação elevatória e o nó de junção [1]. Finalmente, K_3' é o coeficiente de perda de carga relativo ao comprimento equivalente⁽⁸⁾ da tubagem 3, uma vez que nela está inserida uma válvula de seccionamento⁽⁸⁾.

Para terminar a formulação do sistema de equações deste exemplo, resta considerar as duas equações adicionais correspondentes à estação elevatória B1. Para o efeito, foram criados os nós [6] e [7] imediatamente a montante e jusante da estação elevatória (Figura 10), os quais acarretam o aparecimento, como incógnitas, das cotas piezométricas H_6 e H_7 , respectivamente.

⁽⁷⁾ Com base na fórmula de *Manning-Strickler* ($n_{ji} = 2$).

⁽⁸⁾ O comprimento equivalente é, neste caso, igual a 518,14 m.



De acordo com os princípios enunciados, devem ser escritas duas equações adicionais expressas em termos destas cotas piezométricas. A primeira define o princípio da continuidade e a segunda refere-se à variação da energia na estação elevatória, qualquer delas definidas relativamente às condutas de aspiração e impulsão.

Para o efeito, primeiro é necessário resolver a equação [26] em ordem a Q , o que conduz à seguinte expressão:

$$Q_{ji} = \{ -B + [B^2 - 4A(C - E_b)]^{1/2} \} / 2A \quad [36]$$

Assim, para estação elevatória B1 as duas equações adicionais são as seguintes:

Continuidade

$$F_6 = \text{sgn}(185 - H_6) (|185 - H_6| / K_7')^{0.5} + \text{sgn}(H_1 - H_7) (|H_1 - H_7| / K_7'')^{0.5} = 0 \quad [37]$$

Variação da energia

$$F_7 = \text{sgn}(185 - H_6) (|185 - H_6| / K_7')^{0.5} + \{ -B + [B^2 - 4A(C - |H_7 - H_6|)]^{1/2} \} / 2A = 0 \quad [38]$$

Nestas expressões K_7' é o coeficiente de perda de carga correspondente ao comprimento da tubagem 7 entre o reservatório de aspiração e o nó de junção [6], localizado imediatamente a montante da estação elevatória; os restantes símbolos têm o significado anteriormente apresentado.

5.3.4 Equações das malhas

No caso das equações das malhas, a formulação do problema é baseada apenas nas equações da conservação da energia, de tal forma que se verifique o princípio da continuidade nos nós, para uma estimativa inicial de caudais nas tubagens. A partir daqui, o problema consiste em corrigir estes caudais iniciais garantindo sempre a continuidade nos nós.

Como se referiu anteriormente, a perda de carga numa tubagem l do sistema de distribuição pode ser expressa em termos do caudal Q_l e do respectivo coeficiente de perda de carga da tubagem



K_ℓ , através da expressão [25]. No entanto, o caudal Q_ℓ pode ser entendido como a soma de duas parcelas.

A primeira, designada por $Q_{o\ell}$, representa uma estimativa inicial do caudal na tubagem definida de tal forma que, para o sistema de distribuição em conjunto, se verifique o princípio da continuidade nos diferentes nós⁽⁹⁾, e a segunda parcela, designada por ΔQ_m , que corresponde à correcção de caudal relativa à malha que inclui a tubagem ℓ . Nestas condições, o conjunto de equações que descreve o equilíbrio hidráulico do sistema de distribuição é o seguinte:

$$\sum_{\ell=1}^{NT} K_\ell [\text{sgn}(Q_{o\ell} + \Delta Q_m)] |Q_{o\ell} + \Delta Q_m|^n - \sum_{j=1}^{NB} E_{bj} = 0 \quad (\text{M equações}) \quad [39]$$

$$\sum_{\ell=1}^{NT} K_\ell [\text{sgn}(Q_{o\ell} + \Delta Q_m)] |Q_{o\ell} + \Delta Q_m|^n - \sum_{j=1}^{NB} E_{bj} = \Delta E \quad (\text{F - 1 equações}) \quad [40]$$

sendo:

- $Q_{o\ell}$ - estimativa inicial do caudal na tubagem ℓ
- ΔQ_m - correcção de caudal na malha m
- E_{bj} - energia fornecida ao sistema pela estação elevatória ou sobrepresora j pertencente à malha m
- ΔE - diferença entre as cotas piezométricas nos dois nós de cota piezométrica fixa na malha imaginária m
- NT - número de tubagens pertencentes à malha m
- NB - número de estações elevatórias ou sobrepresoras na malha m

Nas equações anteriores, os $Q_{o\ell}$ são constantes para cada tubagem e não se alteram de iteração para iteração.

Para além disso, os termos correspondentes às estações elevatórias ou sobrepresoras (E_b) podem ser modificados seguindo um raciocínio idêntico ao apresentado anteriormente, desde que o caudal Q seja substituído por $(Q + \Delta Q)$ na expressão de transformação de variáveis [29].

⁽⁹⁾ No parágrafo 4.6.5 apresenta-se um algoritmo numérico para esta inicialização de caudais.



O problema anterior resume-se, portanto, à construção e resolução de um sistema de $[M + (F - 1)]$ equações não - lineares, cujas incógnitas são as correcções de caudal nas diferentes malhas do sistema (ΔQ_m), quer se tratem de malhas naturais ou imaginárias.

EXEMPLO

Considere-se o sistema de distribuição de água cuja esquematização se apresenta na Figura 10. Neste caso, existem três malhas, duas naturais (malhas I e II) e uma imaginária (malha III). No entanto, como existe uma estação elevatória na malha imaginária III, o sistema de equações que traduz as condições de equilíbrio hidráulico é constituído, para além das três equações não - lineares da conservação da energia, por uma adicional linear correspondente à transformação de variáveis efectuada.

Estas equações são as seguintes:

$$F_1 = K_1 \operatorname{sgn} (Q_{01} + \Delta Q_1) |Q_{01} + \Delta Q_1|^2 + K_2 \operatorname{sgn} (Q_{02} + \Delta Q_1 - \Delta Q_2) |Q_{02} + \Delta Q_1 - \Delta Q_2|^2 + K_3' \operatorname{sgn} (Q_{03} + \Delta Q_1) |Q_{03} + \Delta Q_1|^2 + K_4 \operatorname{sgn} (Q_{04} + \Delta Q_1 - \Delta Q_3) |Q_{04} + \Delta Q_1 - \Delta Q_3|^2 = 0$$

$$F_2 = K_2 \operatorname{sgn} (Q_{02} + \Delta Q_2 - \Delta Q_1) |Q_{02} + \Delta Q_2 - \Delta Q_1|^2 + K_5 \operatorname{sgn} (Q_{05} + \Delta Q_2) |Q_{05} + \Delta Q_2|^2 + K_6 \operatorname{sgn} (Q_{06} + \Delta Q_2) |Q_{06} + \Delta Q_2|^2 = 0$$

$$F_3 = K_4 \operatorname{sgn} (Q_{04} + \Delta Q_3 - \Delta Q_1) |Q_{04} + \Delta Q_3 - \Delta Q_1|^2 + K_7 \operatorname{sgn} (Q_{07} + \Delta Q_3) |Q_{07} + \Delta Q_3|^2 + K_8 \operatorname{sgn} (Q_{08} + \Delta Q_3) |Q_{08} + \Delta Q_3|^2 + AG^2 - H_o + 10 = 0$$

$$F_4 = G - Q_7 - (B / 2A) = 0 \quad [41]$$

sendo $Q_{0\ell}$ ($\ell = 1, 2, \dots, 8$) os caudais inicialmente arbitrados para cada tubagem, que verificam o princípio da continuidade nos nós de junção, tendo os restantes símbolos o significado anteriormente apresentado. As incógnitas do sistema de equações são ΔQ_1 , ΔQ_2 , ΔQ_3 e G .

A terminar, refira-se que nas equações anteriores sempre que uma tubagem é comum a duas malhas é necessário associar dois ΔQ , um respeitante à malha para a qual se está a escrever a



equação da conservação da energia e outro relativo à malha adjacente, mas com sinal trocado.

6. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO HIDRÁULICO

6.1 Introdução

No Capítulo anterior, apresentaram-se os princípios teóricos da formulação matemática das condições de equilíbrio hidráulico de sistemas de distribuição de água. Analisaram-se, primeiramente, as três alternativas de formulação do problema (equação dos troços, dos nós e das malhas), definindo-se, para cada um dos casos, as equações básicas do equilíbrio hidráulico para sistemas que incluíssem, para além do conjunto de tubagens, elementos especiais do tipo estações elevatórias ou sobreprensoras e reservatórios. Apresentaram-se, ainda, para cada um dos casos, exemplos de aplicação.

Neste Capítulo, apresentam-se os diferentes métodos disponíveis para a resolução das equações que permitem estabelecer as condições de equilíbrio hidráulico dos sistemas. Primeiramente, faz-se uma descrição sumária e geral destes métodos, à qual se segue a apresentação dos métodos numéricos de *Hardy Cross* (equações das malhas), de *Newton-Raphson* (equações dos nós e das malhas) e *Teoria Linear* (equações dos troços).

6.2 Descrição sumária dos métodos para a obtenção das condições de equilíbrio hidráulico

6.2.1 Equações dos troços e das malhas

Para a obtenção da solução do sistema de equações dos troços e das malhas, têm sido utilizados três métodos, presentemente com grande divulgação, que sucintamente se descrevem em seguida.

O primeiro método (*correções de caudal operadas individualmente para cada malha*) foi apresentado pela primeira vez por HARDY CROSS 1936, sendo o mais antigo é, provavelmente, aquele que maior divulgação teve até ao momento.

Embora o método original se limitasse à análise de sistemas de distribuição malhados englobando apenas tubagens (sem elementos especiais), tem sido generalizado ao longo do tempo, podendo



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ser resumido da seguinte forma:

- 1º determinação de um conjunto inicial de caudais nas tubagens, definidas de forma a que se verifique o princípio de continuidade nos diferentes nós do sistema;
- 2º cálculo individual da parcela de correcção de caudal para o conjunto de tubagens que formam uma malha, de tal forma que seja satisfeita a equação da conservação da energia para essa malha; a aplicação desta parcela de correcção não destrói o balanço do princípio da continuidade inicialmente estabelecido;
- 3º utilizando as soluções melhoradas em cada iteração, repete-se o passo 2, até que a parcela média de correcção esteja dentro de uma tolerância pré-definida.

A parcela de correcção de caudal para uma malha é calculada a partir da respectiva equação da conservação da energia e destina-se a corrigir o caudal inicialmente arbitrado, de tal forma que aquela equação seja satisfeita. No entanto, a correcção correspondente a uma dada malha destruirá a conservação da energia para todas as malhas adjacentes, ou seja, aquelas que têm tubagens em comum.

Cada tentativa para este método exige que sejam feitas as correcções de caudal para todas as malhas do sistema de distribuição (M malhas naturais e F - 1 malhas imaginárias, correspondentes aos nós de cotas piezométricas fixas), antes de se prosseguir para a iteração seguinte.

O segundo método (*correcções de caudal operadas simultaneamente para todas as malhas*) foi introduzido com o objectivo de aumentar a eficácia de convergência do método anterior (EPP e FOWLER 1970). Neste método, determinam-se simultaneamente as correcções de caudal para todas as malhas do sistema, ou seja, efectua-se a resolução directa do sistema de equações correspondentes à conservação da energia em cada malha.

O método de resolução pode ser resumido da seguinte forma.

- 1º determinação de um conjunto inicial de caudais nas tubagens, definidos de forma a que se verifique o princípio da continuidade nos diferentes nós do sistema;
- 2º cálculo simultâneo da parcela de correcção de caudal para cada malha, de forma a que sejam satisfeitas as equações da conservação da energia sem que seja destruído o balanço do princípio da continuidade inicialmente estabelecido;



3º utilizando as soluções melhoradas, repete-se o passo 2, até que a parcela média de correcção esteja dentro de uma tolerância pré-definida.

A determinação simultânea das correcções de caudal para cada malha exige a resolução de um sistema de $M + F - 1$ equações. Cada equação entra em linha de conta com a falta de equilíbrio da conservação da energia devido a valores de caudal incorrectos e inclui, para além da contribuição própria da malha, as contribuições correspondentes às malhas adjacentes.

Neste método é construído um sistema de equações lineares (ver capítulo anterior), em termos das correcções de caudal em cada malha do sistema, o qual pode ser resolvido por procedimentos padrão para a resolução de sistemas de equações. A resolução deste sistema de equações determina, numa dada iteração, um conjunto de caudais para as tubagens, os quais são utilizados para a iteração seguinte. As iterações são repetidas até que as correcções de caudal estejam dentro de limites de tolerância pré-definidos.

Finalmente, o terceiro método (*Teoria Linear* - WOOD e CHARLES 1972) baseia-se na resolução simultânea do sistema de equações que define as condições de equilíbrio hidráulico do sistema de distribuição (equações dos troços), por linearização das equações da conservação da energia para as malhas, em termos dum valor aproximado de caudal Q_{ot} em cada tubagem. Assim, as $M + F - 1$ equações da conservação da energia são linearizadas, as quais quando combinadas com as N equações de continuidade formam um sistema de equações lineares a T incógnitas, os caudais em cada tubagem do sistema de distribuição.

Com base num valor inicial arbitrado para o caudal em cada tubagem do sistema, as equações linearizadas são resolvidas por procedimentos padrão para a obtenção da solução de sistemas de equações lineares. Este conjunto de caudais é utilizado para linearizar as equações da conservação da energia, obtendo-se uma segunda solução. Esta metodologia é repetida até que as variações de caudal entre duas iterações consecutivas sejam inferiores a uma dada tolerância pré-definida.

6.2.2 Equações dos nós

Para a obtenção da solução das equações dos nós têm sido utilizados dois métodos, qualquer deles de grande divulgação, e cuja descrição se apresenta em seguida.



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

O primeiro (correção das cotas piezométricas operadas individualmente para cada nó de junção) foi igualmente apresentado pela primeira vez por HARDY CROSS 1936. No entanto, este método não teve tanta utilização no início como o das correções de caudal operadas individualmente para cada malha, embora seja bastante usado presentemente. O método de solução pode ser resumido da seguinte forma.

- 1º Árbitrio das cotas piezométricas em cada nó de junção do sistema de distribuição. Embora este arbítrio inicial não tenha que obedecer a quaisquer condições, quanto mais próximo for o seu valor da solução correcta menor será o número de iterações a operar;
- 2º Cálculo da correção da cota piezométrica para cada nó de junção do sistema de distribuição, o qual tenha tendência a satisfazer o princípio da continuidade nesse nó;
- 3º Repetição do passo anterior até que a parcela de correção média para as cotas piezométricas esteja dentro de uma tolerância pré-definida.

Neste caso, o factor de correção representa a variação de cota piezométrica num dado nó que resulte da verificação do correspondente princípio da continuidade, considerando como fixas as cotas piezométricas nos nós adjacentes. Neste método, cada iteração exige o ajustamento da cota piezométrica em cada nó de junção do sistema de distribuição, terminando o processo iterativo quando se atingir o critério de convergência pré-estabelecido.

O segundo método (correções de cotas piezométricas operadas simultaneamente para todos os nós) baseia-se na resolução simultânea do sistema de equações dos nós e exige a linearização destas equações em termos de valores aproximados para as cotas piezométricas nos nós (SHAMIR e HOWARD 1968). Esta metodologia conduz à resolução de um sistema de $N + 2 \text{ NB}$ equações lineares, em que NB é o número de estações elevatórias e sobreprensoras inseridas no sistema de distribuição.

O procedimento para a obtenção da solução é o que a seguir se descreve. O processo inicia-se com o arbítrio de um conjunto de valores para as cotas piezométricas nos diferentes nós de junção do sistema de distribuição, sendo nestas condições resolvido simultaneamente o sistema de equações linearizadas referidas, de forma a ser obtido um novo conjunto de cotas piezométricas nos nós.

Este conjunto de cotas piezométricas nos nós é de novo utilizado para linearizar as equações dos



nós, sendo o procedimento repetido até que seja atingido o critério de convergência pré-estabelecido.

6.3 Método de *Hardy Cross*

6.3.1 Considerações introdutórias

O método numérico de *Hardy Cross* é, sem dúvida, o mais antigo e o de maior divulgação para o cálculo das condições de equilíbrio hidráulico de sistemas de distribuição de água, fazendo parte das matérias versadas na maioria dos livros de texto de hidráulica e de mecânica dos fluidos.

Antes do advento dos computadores, foi praticamente o único método utilizado. No entanto, com as potencialidades cada vez maiores dos computadores, por um lado, e com a maior complexidade dos sistemas a estudar, por outro, o método de *Hardy Cross* tem-se revelado de lenta convergência e até com enormes riscos de divergência, apesar das melhorias significativas que diversos investigadores têm introduzido no sentido de ultrapassar aqueles problemas. A tendência natural tem sido a do seu abandono em favor dos métodos que serão discutidos nos parágrafos 6.4 e 6.5, o de *Newton-Raphson* e o da *Teoria Linear*, métodos sem dúvida de maior eficiência numérica.

O método de *Hardy Cross* pode ser utilizado para o estabelecimento das condições de equilíbrio hidráulico formuladas através de qualquer dos três tipos de equações definidas no Capítulo anterior (equações dos troços, dos nós e das malhas). No entanto, a forma mais usual da sua aplicação é quando o problema do equilíbrio hidráulico é equacionado através das equações das malhas, uma vez que conduz a um menor número global de equações. Por este motivo, na apresentação que se segue será com base na equação das malhas que o método será desenvolvido.

6.3.2 Fundamentos do método

O método de *Hardy Cross* é um processo iterativo por aplicação do método *Newton*, no qual, em cada iteração, é resolvida uma equação de cada vez, antes de prosseguir para a seguinte, em vez de resolver o sistema de equações simultaneamente.



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

Ao adaptar-se este procedimento, admite-se que são conhecidas temporariamente todas as correcções de caudal (ΔQ) das malhas adjacentes à malha para a qual está a ser resolvida a equação da conservação da energia, com excepção da correcção de caudal (ΔQ_j) dessa malha.

Com base nesta simplificação, o método de *Newton* pode ser utilizado para a obtenção da solução da equação $F_j = 0$, em relação a ΔQ_j , ou seja:

$$\Delta Q_j^{m+1} = \Delta Q_j^m - F_j^m / (dF_j^m / d\Delta Q_j) \quad [42]$$

sendo:

$\Delta Q_j^{m+1}, \Delta Q_j^m$ - correcções de caudal na malha j nas iterações de ordem $(m+1)$ e (m) , respectivamente

F_j^m - valor da função F_j na iteração de ordem (m)

$dF_j^m / d\Delta Q_j$ - valor da derivada da função F_j , em ordem a ΔQ_j , na iteração de ordem (m)

É comum no método de *Hardy Cross* aplicar apenas uma correcção iterativa a cada equação da conservação da energia, antes de passar à equação seguinte, ou seja, a correspondente a próxima malha. Uma vez aplicada uma correcção iterativa a todas as equações da conservação da energia, o procedimento é repetido até que a convergência seja obtida, dentro de uma tolerância pré-definida.

Para além disso, é usual ajustar os caudais inicialmente arbitrados para as tubagens que constituem uma malha imediatamente após o cálculo de cada um dos ΔQ correspondentes. Nestas condições, cada equação $F_j = 0$ é calculada com todos os ΔQ iguais a zero e, para além disso, com os ΔQ_j^m também iguais a zero.

Consequentemente, a expressão de recorrência [42] pode ser reduzida à seguinte equação:

$$\Delta Q_j = - F_j / (dF_j / d\Delta Q_j) \quad [43]$$

Note-se que os índices inicialmente incluídos na expressão [42] não constam nesta nova expressão, uma vez que existe apenas um ΔQ .

De acordo com os conceitos enunciados no Capítulo anterior, a equação $F_j = 0$ representa o princípio da conservação da energia para a malha j , ou seja, o igualar a zero do somatório algébrico das perdas de carga na malha. A expressão de F_j é traduzida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F_j &= \sum_{\ell=1}^{NT} K_{\ell} Q_{\ell}^n = \sum_{\ell=1}^{NT} K_{\ell} Q_{\ell} |Q_{\ell}|^{n-1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{NT} K_{\ell} (Q_{o\ell} + \Delta Q_j) |Q_{o\ell} + \Delta Q_j|^{n-1} \end{aligned} \quad [44]$$

A derivada de F_j em ordem a ΔQ_j e dada pela seguinte expressão⁽¹⁰⁾:

$$\begin{aligned} dF_j / (d\Delta Q_j) &= \sum_{\ell=1}^{NT} K_{\ell} n |Q_{o\ell} + \Delta Q_j|^{n-1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{NT} K_{\ell} n |Q_{\ell}|^{n-1} \end{aligned} \quad [45]$$

Nestas expressões, os símbolos têm o significado anteriormente apresentado. Substituindo as equações [44] e [45] na expressão [2], obtém-se:

$$\Delta Q = - \left(\sum_{\ell=1}^{NT} K_{\ell} Q_{\ell} |Q_{\ell}|^{n-1} \right) / \left(\sum_{\ell=1}^{NT} K_{\ell} n |Q_{\ell}|^{n-1} \right) \quad [46]$$

que representa a expressão através da qual são calculadas as correcções de caudal em cada malha do sistema pelo método de *Hardy Cross*.

Note-se que se for utilizada a fórmula de *Manning-Strickler* ou de *Hazen-Williams* para avaliação das perdas de carga contínuas nas tubagens, os valores de n na expressão anterior são, respectivamente, de 2 e 1,852.

6.3.3 Procedimento de cálculo

Com base nos fundamentos do método de *Hardy Cross* apresentados no parágrafo anterior e

⁽¹⁰⁾ Refira-se que, genericamente, $d|y|/dx = dy/dx |y|/y$.



numa tentativa de sistematização, o procedimento de cálculo a utilizar com as equações das malhas pode ser resumido como a seguir se indica:

- 1º inicialização dos caudais em cada tubagem do sistema, de forma a que seja garantido o princípio da continuidade nos nós de junção⁽¹¹⁾;
- 2º cálculo do somatório das perdas de carga em cada malha do sistema, ou seja, o numerador da expressão [46], tendo em atenção os sinais a atribuir aos caudais; se o sentido do movimento (directo ou retrógrado) é contrário ao do escoamento, então a perda de carga na tubagem correspondente é negativa, sendo positiva no caso contrário;
- 3º cálculo do denominador da expressão [46], através do somatório dos valores de $K_l n |Q_l|^{n-1}$.
- 4º cálculo da correcção de caudal (ΔQ) em cada malha do sistema, igual ao quociente, com sinal negativo, dos somatórios calculados nos passos b) e c);
- 5º reformulação dos caudais nas tubagens, de acordo com os valores das correcções de caudal calculados no passo anterior;
- 6º verificação do critério de convergência; se este critério tiver sido atingido em todas as malhas, o processo iterativo é dado por concluído, sendo, no caso contrário, iniciada uma nova iteração por repetição dos passos b) a e).

A finalizar refira-se que, quando uma tubagem é comum a duas malhas adjacentes (o que significa que lhe estão associados dois ΔQ), ao efectuar-se a reformulação de caudais para a tubagem, para além da correcção de caudal própria da malha é necessário somar, com sinal contrário, a correcção da malha adjacente.

6.3.4 Exemplo de aplicação

Considere-se o sistema de distribuição esquematizado na Figura 11, constituído por 6 tubagens, 4 nós de junção e dois reservatórios, cujas características se apresentam na mesma figura.

Pretende-se determinar as condições de equilíbrio hidráulico do sistema e as cotas piezométricas nos nós, com base no método de *Hardy Cross* (equações das malhas) e utilizando a fórmula de *Hazen-Williams* para a avaliação das perdas de carga ($C = 100$ para todas as tubagens). Os coeficientes de perda de carga para as diferentes tubagens são os que constam do quadro da Figura 11.

⁽¹¹⁾ Para uma inicialização de caudais pode ser utilizada a metodologia descrita no parágrafo 4.6.5.



A aplicação da expressão [46] para a resolução do sistema em análise é efectuada tendo em conta a criação, para além da malha natural I, de uma outra fictícia (malha II), constituída pelas tubagens 1, 5 e 6 que ligam os dois reservatórios R1 e R2, cuja diferença de cotas dos níveis de água é de 10 m. Assim sendo, as expressões das correcções de caudal a operar em cada malha são as seguintes:

Malha I

$$\Delta Q_1 = - \left(\sum_{\ell=2}^5 K_{\ell} Q_{\ell} |Q_{\ell}|^{0,852} \right) / \left(1,852 \sum_{\ell=2}^5 K_{\ell} |Q_{\ell}|^{0,852} \right) \quad [47]$$

Malha II

$$\Delta Q_2 = - \left(10 + \sum_{\ell=1,5,6} K_{\ell} Q_{\ell} |Q_{\ell}|^{0,852} \right) / \left(1,852 \sum_{\ell=1,5,6} K_{\ell} |Q_{\ell}|^{0,852} \right) \quad [48]$$

Admitiram-se, para a inicialização do processo de cálculo, os valores dos caudais apresentados nas primeiras sete linhas da coluna [3] do Quadro 1, estabelecidos de forma a garantir o princípio de continuidade nos nós de junção.

Neste quadro, figuram apenas os resultados da 1ª, 2ª e última iterações, tendo os elementos das diversas colunas o significado aí referido.

O processo de cálculo converge ao fim de seis iterações, obtendo-se para as condições de equilíbrio hidráulico os seguintes caudais nas tubagens:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 18,03 \text{ l/s}; & Q_2 &= 11,67 \text{ l/s}; & Q_3 &= 1,67 \text{ l/s} \\ Q_4 &= 3,33 \text{ l/s}; & Q_5 &= 6,33 \text{ l/s}; & Q_6 &= 11,97 \text{ l/s} \end{aligned}$$

A estes valores de caudais nas tubagens corresponde a seguinte distribuição de cotas piezométricas nos nós de junção:

$$H_1 = 73,69 \text{ m}; H_2 = 66,73 \text{ m}; H_3 = 65,02 \text{ m}; H_4 = 67,04 \text{ m}$$

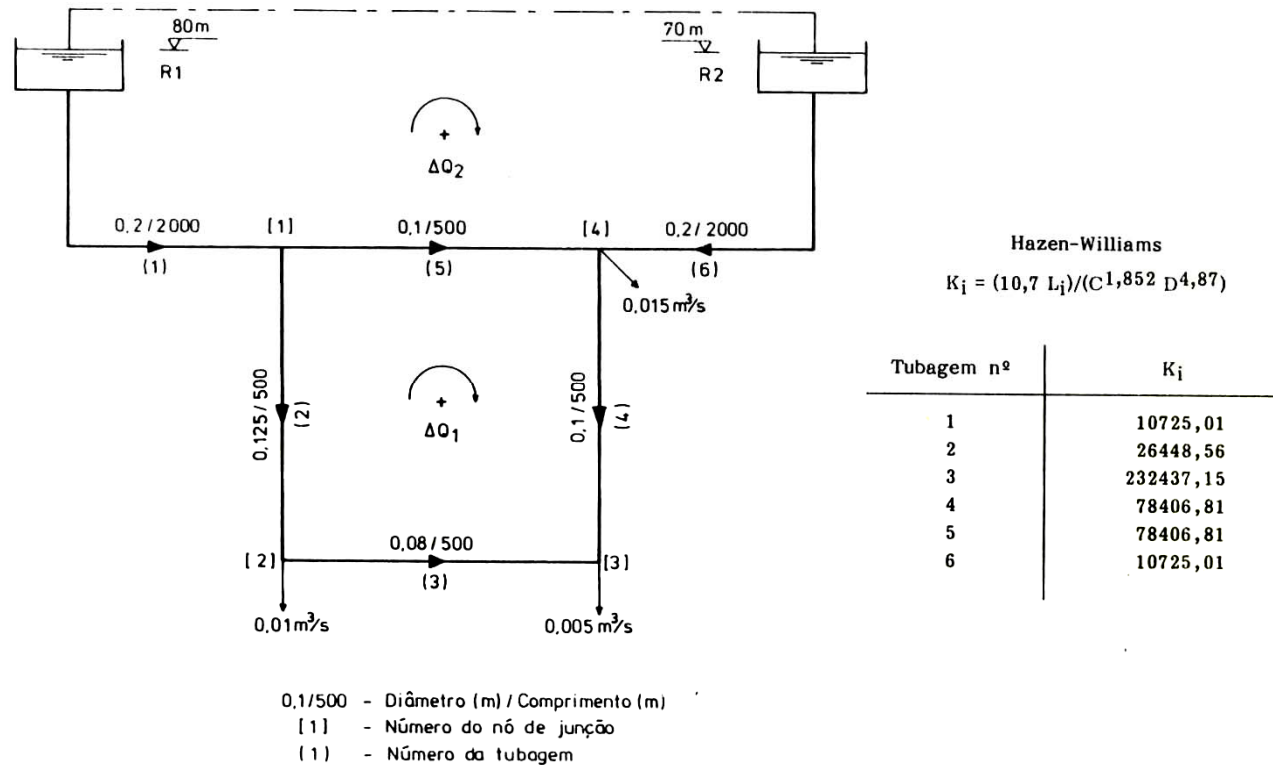


Figura 11- Representação esquemática do sistema de distribuição

**QUADRO 1 - SÍNTESE DO CÁLCULO DO MÉTODO DE HARDY-CROSS
APLICADO AS EQUAÇÕES DAS MALHAS**

Iteração (-)	Tub. (-)	Q (m ³ /s)	ΔH (m)	ΣΔH	ΔH/Q	ΣΔH/Q	ΔQ (10 ⁻⁴ m ³ /s)		Q _c (m ³ /s)
							[8] ^(*)	[9] ^(**)	
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8] ^(*)	[9] ^(**)	[10]
1	2	- 0,0105	- 5,73		545,07		- 10,7		- 0,01157
	3	- 0,0005	- 0,18		357,95		- 10,7		- 0,00157
	4	0,0045	3,53	5,63	785,04	2831,9	- 10,7		0,00343
	5	0,0070	8,01		1143,87		- 10,7	10,7	0,00568
	1	- 0,0175	- 5,98		341,56		2,41		- 0,01726
	5	- 0,007	- 9,01	- 0,78	1143,87	1741,86	2,41	- 2,41	- 0,00568
	6	0,0125	3,21		256,42		2,41		0,01274
2	2	- 0,01157	- 6,85		592,01		1,32		- 0,01144
	3	- 0,00157	- 1,49	- 0,77	948,88	3121,2	1,32		- 0,00144
	4	0,00343	2,14		622,91		1,32		0,00356
	5	0,00568	5,44		957,32		1,32	- 1,32	0,00653
	1	- 0,01726	- 5,83		337,56		- 7,13		- 0,0180
	5	- 0,00568	- 5,44	2,06	957,32	1555,5	- 7,13	7,13	- 0,00653
	6	0,01274	3,32		260,62		- 7,13		0,01200
6	2	- 0,01168	- 6,97		596,85		0,1		- 0,01167
	3	- 0,00168	- 1,69	- 0,06	1005,24	3253,6	0,1		- 0,00167
	4	0,00332	2,01		605,85		0,1		0,00333
	5	0,00630	6,59		1045,66		0,1	- 0,1	0,00633
	1	- 0,0180	- 6,30		349,86		- 0,3		- 0,01803
	5	- 0,0063	- 6,59	0,09	1045,66	1643,2	- 0,3	+ 0,3	- 0,00633
	6	0,0120	2,97		247,66		- 0,3		0,01197

(*) Malha própria;

(**) Malha adjacente

- Coluna [1] - Número da iteração
 Coluna [2] - Número da tubagem
 Coluna [3] - Caudal na tubagem
 Coluna [4] - Perda de carga na tubagem dada por $KQ |Q|^{0,852}$, podendo tomar valores negativos quando o caudal circula em sentido contrário ao arbitrado para a malha
 Coluna [5] - Somatório das perdas de carga na malha (numerador da expressão [47] ou [48])
 Coluna [6] - Relação entre a perda de carga na malha e o respectivo caudal
 Coluna [7] - Somatório dos valores, para cada malha, que figuram na coluna [6], ou seja, o denominador da expressão [47] ou [48]
 Coluna [8] - Correção de caudal (ΔQ) a aplicar nas tubagens pertencentes à malha analisada
 Coluna [9] - Correção de caudal (- ΔQ) a aplicar às tubagens comuns à malha adjacente
 Coluna [10] - Caudal corrigido após cada iteração



6.4 Método de *Newton-Raphson*

6.4.1 Princípios teóricos

A aplicação do método de *Newton-Raphson*, para a definição das condições de equilíbrio hidráulico de um sistema de distribuição de água, foi feita pela primeira vez por MARTIN e PETERS 1963. Este método pode ser utilizado na resolução de qualquer dos sistemas de equações que traduzem as condições de equilíbrio hidráulico, ou seja, através das equações dos troços, dos nós ou das malhas. De uma forma genérica, a fórmula de recorrência do processo iterativo de *Newton-Raphson* é dada pela seguinte expressão:

$$X^{m+1} = X^m - J(X^m)^{-1} F(X^m) \quad [49]$$

sendo:

- X^{m+1}, X^m - vectores das incógnitas nas iterações de ordem $(m+1)$ e (m) , respectivamente
- $J(X^m)^{-1}$ - inversa da matriz *Jacobiana* para $X = X^m$
- $F(X^m)$ - vector dos valores das funções F_j para $X = X^m$

No caso do problema ser equacionado através das equações dos nós, os elementos do vector X correspondem às cotas piezométricas nos nós de junção (H_i). De forma idêntica, se o problema for equacionado através das equações das malhas, os elementos do vector X referem-se às correcções de caudal em cada malha (ΔQ_m).

Genericamente, os elementos de cada um dos vectores são expressos da seguinte forma:

$$H = [H_1 \ H_2 \ \dots \ H_N]^T \quad (\text{os valores conhecidos das cotas piezométricas não estão incluídos neste vector})$$
$$\Delta Q = [\Delta Q_1 \ \Delta Q_2 \ \dots \ \Delta Q_L]^T \quad (\text{com } L = M + F - 1)$$

Por outro lado, cada linha da matriz *Jacobiana* é formada pelas derivadas parciais da função F_j ($j = 1, 2, \dots, N$, no caso do problema ser equacionado através das equações dos nós), em relação às variáveis associadas a cada coluna. Assim, para as equações dos nós a matriz *Jacobiana* é dada, genericamente, por:

$$J = \begin{bmatrix} \partial F_1 / \partial H_1 & \partial F_1 / \partial H_2 & \dots & \partial F_1 / \partial H_N \\ \partial F_2 / \partial H_1 & \partial F_2 / \partial H_2 & \dots & \partial F_2 / \partial H_N \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \partial F_N / \partial H_1 & \partial F_N / \partial H_2 & \dots & \partial F_N / \partial H_N \end{bmatrix} \quad [50]$$

No Quadro 2, apresentam-se, a título ilustrativo, os elementos desta matriz *Jacobiana* respeitantes a tubagens (quando é utilizada a fórmula de *Hazen-Williams*), a estações elevatórias ou sobressororas e a válvulas redutoras de pressão.

Da análise da expressão de recorrência [49] pode parecer, à primeira vista, que em cada iteração é necessário calcular a inversa da matriz *Jacobiana* ($J (X^m)^{-1}$). No entanto, dado que existem outros métodos numericamente mais eficientes do que calcular directamente a inversa da matriz *Jacobiana*, o procedimento habitual consiste em determinar um vector *Z* que é a solução do sistema de equações lineares $JZ = F$. Assim, a expressão de recorrência [49] toma a seguinte forma, no caso do problema do equilíbrio hidráulico ser feito através das equações dos nós:

$$H^{m+1} = H^m - Z^m \quad [51]$$

Os elementos do vector *Z* representam, em cada iteração, as correcções a aplicar às cotas piezométricas. Após cada iteração é feita uma verificação do critério de convergência pré-definido (*EPS*), o qual representa o máximo desequilíbrio de caudal permitido para cada um dos nós de junção do sistema de distribuição. O maior ou menor número de iterações do processo depende, em certa medida, do valor da tolerância pré-definida.

Em síntese, no método de *Newton-Raphson* a resolução do sistema de equações não-lineares é obtida pela resolução iterativa de um conjunto de sistemas de equações lineares. Em certa medida, este método numérico é idêntico ao da *Teoria Linear* que irá ser apresentado no parágrafo seguinte. No entanto, e contrariamente ao método da *Teoria Linear*, a matriz *Jacobiana*

é, na maior parte dos sistemas de distribuição de água, simétrica⁽¹²⁾ e esparsa, sendo possível, em face desta particularidade, atingir uma enorme eficiência numérica.

**QUADRO 2 - ELEMENTOS DA MATRIZ JACOBIANA PARA AS EQUAÇÕES DOS NÓS
(FÓRMULA DE HAZEN-WILLIAMS)**

Tipo de elemento	Equações de características ⁽¹⁾
Tubagem (Fórmula de Hazen-Williams)	$Q_{ji} = (H_j - H_i) K_{ji}^{-0,54} H_j - H_i ^{-0,46} \quad [11]$ $\partial Q_{ji} / \partial H_j = 0,54 K_{ji}^{-0,54} H_j - H_i ^{-0,46} \quad [12]$ $\partial Q_{ji} / \partial H_i = - \partial Q_{ji} / \partial H_j \quad [13]$
Bombagem	$E_b = AQ^2 + BQ + C \quad [14]$ $Q_{ji} = \{ - B + [B^2 - 4A (C - H_j - H_i)]^{1/2} \} / 2A \quad [15]$ $\partial Q_{ji} / \partial H_j = \pm [(B / 2A)^2 - (C - H_j - H_i) / A]^{1/2} / 2A \quad [16]$ $\partial Q_{ji} / \partial H_i = \pm \partial Q_{ji} / \partial H_j \quad [17]$
Válvulas redutoras de pressão (VRP)	$Q_{ji} = K_{ji}^{-0,54} HVRP - H_i ^{0,54} \quad [18]$ $\partial Q_{ji} / \partial H_i = - 0,54 K_{ji}^{-0,54} HVRP - H_i ^{-0,46} \quad [19]$ <p>para $H_j \geq HVRP \geq H_i$</p> $\partial Q_{ji} / \partial H_j = 0 \quad [20]$

⁽¹⁾ No caso de se utilizar a fórmula de *Manning-Strickler*, apenas há que alterar os expoentes 0,54 e 0,46 para 0,5.

De forma idêntica, para as equações das malhas a matriz *Jacobiana* é dada, genericamente, pela expressão [53].

Neste caso, a expressão de recorrência passa a ter a seguinte forma:

$$\Delta Q^{m+1} = \Delta Q^m - Z^m \quad [52]$$

Na Figura 12, apresenta-se um fluxograma sumário do método de *Newton-Raphson*, no caso do

⁽¹²⁾ Em sistemas de distribuição de água que incluam válvulas redutoras de pressão esta simetria é destruída. A simetria é igualmente destruída se, para as estações elevatórias ou sobreprensoras, se utilizar a transformação de variáveis referida no parágrafo 3.5.4.

equilíbrio hidráulico ser estabelecido em termos das equações das malhas, com o objectivo de ilustrar os princípios descritos anteriormente.

$$J = \begin{bmatrix} \partial F_1 / \partial \Delta Q_1 & \dots & \partial F_1 / \partial \Delta Q_2 & \dots & \partial F_1 / \partial \Delta Q_L \\ \partial F_2 / \partial \Delta Q_1 & \dots & \partial F_2 / \partial \Delta Q_2 & \dots & \partial F_2 / \partial \Delta Q_L \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \partial F_L / \partial \Delta Q_1 & & \partial F_L / \partial \Delta Q_2 & \dots & \partial F_L / \partial \Delta Q_L \end{bmatrix} \quad [53]$$

6.4.2 Exemplo de aplicação

Considere-se, de novo, o sistema de distribuição esquematizado na Figura 11. Neste exemplo, pretende-se determinar as condições de equilíbrio hidráulico e as cotas piezométricas nos nós, com base no método de *Newton-Raphson* (equação dos nós) e utilizando, também, a fórmula de *Hazen-Williams* para avaliação das perdas de carga ($C = 100$ para todas as tubagens).

Nestas condições, os coeficientes de perda de carga das tubagens são, ainda, os que constam do quadro da Figura 11.

Tendo em conta os princípios enunciados no parágrafo 5.3.3 e as equações características do Quadro 2, o sistema de equações que traduz o equilíbrio hidráulico é o seguinte⁽¹³⁾:

$$F_1 = - [(80 - H_1) / K_1]^{0,54} + [(H_1 - H_2) / K_2]^{0,54} + [(H_1 - H_4) / K_5]^{0,54} = 0 \quad [54]$$

$$F_2 = - [(H_1 - H_2) / K_2]^{0,54} + [(H_2 - H_3) / K_3]^{0,54} + 0,01 = 0 \quad [55]$$

$$F_3 = - [(H_2 - H_3) / K_3]^{0,54} + [(H_4 - H_3) / K_4]^{0,54} + 0,005 = 0 \quad [56]$$

$$F_4 = + [(H_4 - H_3) / K_4]^{0,54} + [(H_1 - H_4) / K_5]^{0,54} + [(70 - H_4) / K_6]^{0,54} + 0,015 = 0 \quad [57]$$

⁽¹³⁾ Dado que, neste caso, o problema é para ser resolvido manualmente o critério de sinal é um pouco diferente do utilizado no parágrafo 3.5.3.

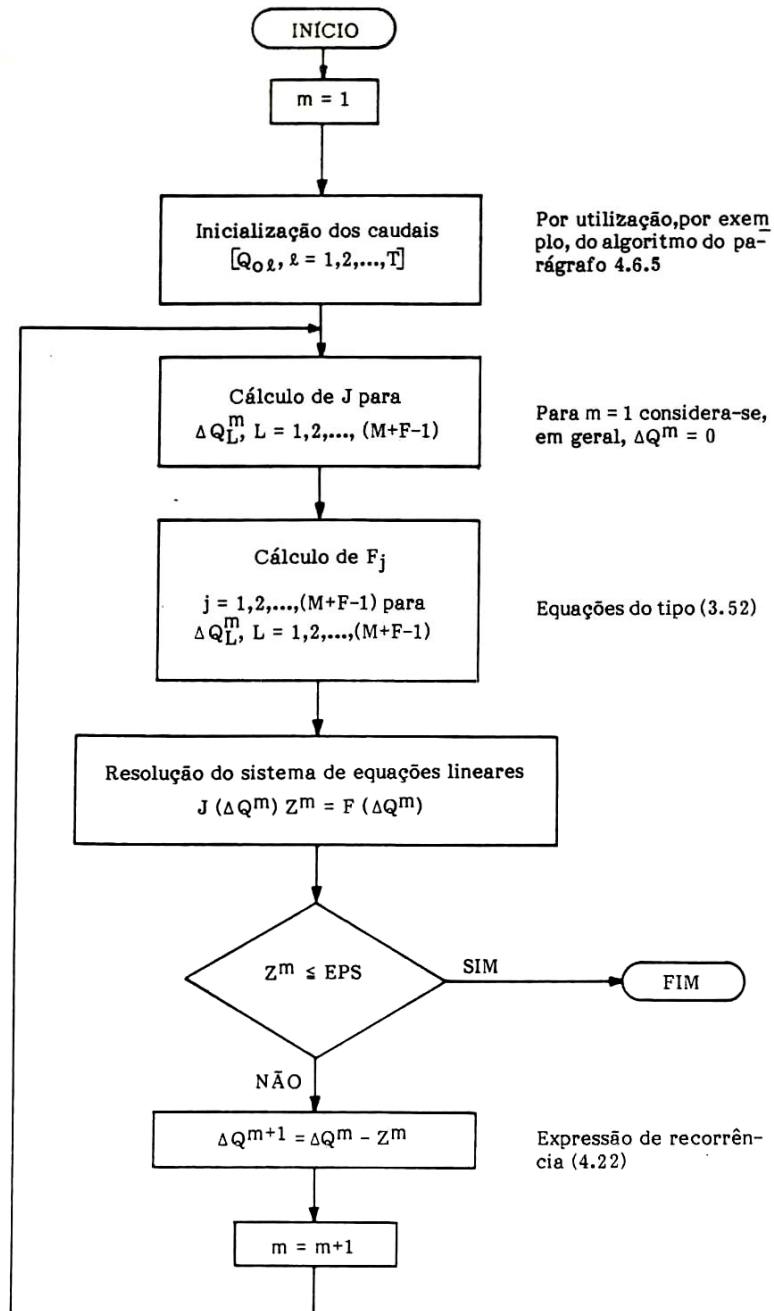


Figura 12 - Fluxograma sumário do método de *Newton-Raphson*

Por sua vez, as expressões que caracterizam os elementos da matriz *Jacobiana* são as que se indicam no Quadro 3. Além disso, para inicialização do processo de cálculo arbitraram-se as seguintes cotas piezométricas nos nós de junção do sistema: $H_1 = 76$ m; $H_2 = 68$ m; $H_3 = 60$ m e $H_4 = 69$ m.

QUADRO 3 - EXPRESSÕES QUE CARACTERIZAM OS ELEMENTOS DA MATRIZ JACOBIANA DO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

$\partial F_1 / \partial H_1 = 0,54 [K'_1 (80 - H_1)^{-0,46} + K'_2 (H_1 - H_2)^{-0,46} + K'_5 (H_1 - H_4)^{-0,46}]$
$\partial F_1 / \partial H_2 = \partial F_2 / \partial H_1 = -0,54 K'_2 (H_1 - H_2)^{-0,46}$; $\partial F_1 / \partial H_3 = \partial F_3 / \partial H_1 = 0$
$\partial F_1 / \partial H_4 = \partial F_4 / \partial H_1 = -0,54 K'_5 (H_1 - H_4)^{-0,46}$
$\partial F_2 / \partial H_2 = 0,54 [K'_2 (H_1 - H_2)^{-0,46} + K'_3 (H_2 - H_3)^{-0,46}]$
$\partial F_2 / \partial H_3 = \partial F_3 / \partial H_2 = -0,54 K'_3 (H_2 - H_3)^{-0,46}$; $\partial F_2 / \partial H_4 = \partial F_4 / \partial H_2 = 0$
$\partial F_3 / \partial H_3 = 0,54 [K'_3 (H_2 - H_3)^{-0,46} + K'_4 (H_4 - H_3)^{-0,46}]$
$\partial F_3 / \partial H_4 = \partial F_4 / \partial H_3 = -0,54 K'_4 (H_4 - H_3)^{-0,46}$
$\partial F_4 / \partial H_4 = 0,54 [K'_4 (H_4 - H_3)^{-0,46} + K'_5 (H_1 - H_4)^{-0,46} + K'_6 (70 - H_4)^{-0,46}]$

com $K'_i = K_i^{-0,54}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$)

No Quadro 4, apresentam-se os resultados dos diversos passos de cálculo, elaborados de acordo com os princípios e a metodologia anteriormente definidos para o método *de Newton-Raphson* (equações dos nós).

Neste caso, a convergência do processo de cálculo é atingida ao fim de quatro iterações, obtendo-se, em condições de equilíbrio hidráulico, as seguintes cotas piezométricas nos nós de junção:

$$H_1 = 73,69 \text{ m}; H_2 = 66,71 \text{ m}; H_3 = 65,02 \text{ m}; H_4 = 67,03 \text{ m}$$

A partir destes valores de cotas piezométricas podem ser obtidos, com base na equação característica [11] do Quadro 2, os seguintes caudais nas tubagens:

$$Q_1 = 18,01 \text{ l/s}; Q_2 = 11,68 \text{ l/s}; Q_3 = 1,68 \text{ l/s}; Q_4 = 3,33 \text{ l/s}; Q_5 = 6,33 \text{ l/s}; Q_6 = 12,00 \text{ l/s},$$

os quais são praticamente iguais aos obtidos pelo método de *Hardy-Cross* (equações das malhas) no exemplo do parágrafo 6.3.4.

QUADRO 4 - SÍNTESE DO CÁLCULO DO MÉTODO DE *NEWTON-RAPHSON*
APLICADO ÀS EQUAÇÕES DOS NÓS

Iteração	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	Max F _j	$\partial F_1 / \partial H_1$	$\partial F_1 / \partial H_2$	$\partial F_1 / \partial H_4$	$\partial F_2 / \partial H_2$	$\partial F_2 / \partial H_3$	$\partial F_3 / \partial H_3$
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
1	50,0	7,5	- 48,4	83,4	83,4	32,52	- 8,49	- 5,02	11,49	- 3,00	8,02
2	3,29	- 8,84	23,62	- 2,87	23,62	30,06	- 9,09	- 5,19	20,17	11,07	25,28
3	0,14	- 2,89	5,49	- 2,29	5,49	29,56	- 9,01	- 5,15	15,13	- 6,12	15,80
4	0,049	- 0,148	0,316	- 0,268	0,316	29,59	- 9,04	- 5,14	14,44	- 5,4	14,35
	0,049	- 0,040	0,030	- 0,089	0,089						

Iteração	$\partial F_3 / \partial H_4$	$\partial F_4 / \partial H_4$	Z ₁ (m)	Z ₂ (m)	Z ₃ (m)	Z ₄ (m)	H ₁ (m)	H ₂ (m)	H ₃ (m)	H ₄ (m)
[1]	[13]	[14]	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]	[21]	[22]
1	- 5,02	46,01	2,00	0,89	- 4,76	1,51	74	67,11	66,76	67,49
2	- 14,20	42,95	0,32	0,46	1,38	0,43	73,68	66,65	65,38	67,06
3	- 9,68	36,73	- 0,01	- 0,06	0,34	0,03	73,69	66,71	65,04	67,03
4	- 8,95	35,89	0,0004	- 0,003	0,019	- 0,003	73,69	66,71	65,02	67,03

Nota: Colunas [2] a [6] ($\times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$); Colunas [7] a [14] ($\times 10^{-4}$)

- Coluna [1] - Número da iteração
- Colunas [2] a [5] - Valores das funções F_j calculadas com base nas expressões [23] a [26]
- Coluna [6] - Máximo de |F_j| (com j = 1, . . . , 4). Representa o máximo erro associado à solução determinada tendo em conta o princípio da continuidade. Admitiu-se, como critério de convergência, Máx. |F_j| ≤ 10⁻⁴ m³/s
- Colunas [7] a [14] - Elementos não nulos da matriz *Jacobiana* calculados pelas expressões do Quadro 3. Esta matriz é simétrica de ordem 4
- Colunas [15] a [18] - Valores da solução do sistema J^m Z^m = F^m
- Colunas [19] a [22] - Cotas piezométricas nos nós de junção dadas pela expressão H^{m+1}=H^m-Z^m



6.5 Método da *Teoria Linear*

6.5.1 Fundamentos do método e procedimentos de cálculo

Como se referiu anteriormente, um dos métodos de resolução possíveis para a obtenção das condições de equilíbrio hidráulico de um sistema de distribuição de água é o método da *Teoria Linear* (WOOD e CHARLES 1972), que se baseia na resolução simultânea do sistema de equações (equações dos troços)⁽¹⁴⁾ por linearização das $M + F - 1$ equações da conservação da energia para as malhas, em termos de um valor aproximado de caudal $Q_{o\ell}$ em cada tubagem. Esta linearização é obtida por aproximação da perda de carga em cada, tubagem através da seguinte expressão:

$$\Delta H_{\ell} = |K_{\ell} Q_{o\ell}^{n-1}| Q_{\ell} = K'_{\ell} Q_{\ell} \quad [58]$$

sendo ΔH_{ℓ} e $Q_{o\ell}$ respectivamente a perda de carga total e o valor aproximado de caudal, ambos para a tubagem ℓ . Quando o valor aproximado de caudal ($Q_{o\ell}$) é igual ao verdadeiro valor de Q_{ℓ} , que garante os princípios da continuidade e da conservação da energia, a equação [58] constitui uma expressão exacta para o cálculo das perdas de carga na tubagem ℓ .

No entanto, quando não se verifica esta situação, em cada iteração os valores aproximados de caudal ($Q_{o\ell}$) são utilizados para calcular os coeficientes de perda de carga modificados (K'_{ℓ}), sendo as $(M + F - 1)$ equações da conservação da energia, linearizadas, combinadas com as N equações de continuidade nos nós de junção, de forma a constituir o sistema de equações lineares a T incógnitas, os caudais Q_{ℓ} nas tubagens que constituem o sistema de distribuição.

Estes novos valores de caudal são utilizados, na iteração seguinte, para calcular um novo conjunto de coeficientes de perda de carga modificados (K'_{ℓ}), os quais permitem obter outro sistema de equações lineares cuja solução corresponde a valores de caudal mais correctos. O procedimento é repetido até que as variações de caudal entre duas iterações consecutivas sejam inferiores a uma dada tolerância pré-definida (*EPS*).

Esta técnica numérica para a determinação das condições de equilíbrio hidráulico de sistemas de distribuição de água, conceptualmente bastante simples, apresenta algumas características que

⁽¹⁴⁾ Recentemente, ISAACS e MILLS 1980, apresentaram o mesmo método para as equações dos nós (cotas piezométricas nos nós como incógnitas).



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

merecem referência. Assim, contrariamente ao que a descrição anterior poderia deixar supor, não se torna necessário o arbítrio dos caudais iniciais, uma vez que, na primeira iteração, K'_ℓ pode ser considerado igual a K_ℓ , ou seja, o correspondente coeficiente de perda de carga. Por outro lado, é uma técnica simples de programar, uma vez que os problemas decorrentes da existência de tubagens comuns a duas malhas não tem significado, quer em termos de análise de programação quer dos dados necessários à identificação da topologia do sistema.

Quando o método foi aplicado pela primeira vez, WOOD e CHARLES 1972 verificaram que, embora a convergência fosse sempre atingida, os valores obtidos entre sucessivas iterações tinham tendência a oscilar em torno da solução final. Assim, estes autores constataram que a forma mais adequada de ultrapassar este problema era considerar o caudal a utilizar na iteração seguinte ($Q_{ot}(m)$) como a média aritmética dos caudais obtidos nas duas iterações anteriores:

$$Q_{ot}(m) = (Q_\ell(m-2) + Q_\ell(m-1)) / 2 \quad [59]$$

sendo $Q_\ell(m-2)$ e $Q_\ell(m-1)$, respectivamente os caudais obtidos para a tubagem ℓ , nas iterações e ordem $(m-2)$ e $(m-1)$. Este procedimento permite um aumento da rapidez de convergência, a tal ponto que para a maioria dos sistemas de distribuição de água apenas são necessárias duas a quatro iterações. Na Figura 13, apresenta-se um fluxograma sumário do método da *Teoria Linear*, com o objectivo de ilustrar a metodologia descrita.

Os princípios, tal como apresentados anteriormente, apenas se aplicam a sistemas de distribuição em que sejam conhecidos os caudais entrados ou saídos do sistema, o que na prática não é a situação que normalmente se verifica. De facto, os caudais fornecidos a partir de estações elevatórias (ou sobrepessoras) e reservatórios dependem das cotas piezométricas e dos caudais do sistema.

No Capítulo anterior, foi discutida a forma de generalizar a formulação do equilíbrio hidráulico quanto existem este tipo de elementos especiais. Apenas aqui se resume a metodologia então enunciada e orientada para o método da *Teoria Linear*. Em resumo, esta metodologia é a seguinte:

- 1º escrever as N equações lineares de continuidade para os nós de junção;



- 2º escrever as M equações não-lineares da conservação da energia para as malhas naturais do sistema;
- 3º escrever as (F - 1) equações não-lineares da conservação da energia para as malhas imaginárias (recorde-se que por cada estação elevatória ou sobreprensa existirá, nestas equações, uma incógnita adicional G);
- 4º definir outras tantas equações lineares da forma $G-Q-B / 2A = 0$ (expressão [29]) quantas as estações elevatórias e/ou sobreprensoras existentes no sistema;
- 5º linearizar as (M + F - 1) equações da conservação da energia, definindo os coeficientes de perda de carga modificados (K'_t) e os coeficientes K'_g , obtidos respectivamente pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} K'_t &= K_t |Q_t (m)|^{n-1} \\ K'_g &= A |G|; \end{aligned} \quad [60]$$

- 6º Resolver, iterativamente, o sistema de equações lineares resultante, ajustando os coeficientes K'_t e K'_g em conformidade com o definido em e) e considerando, a partir da terceira iteração, a média aritmética definida pela expressão [59], até que seja atingido o critério de convergência desejado.

6.5.2 Exemplo de aplicação

Considere-se, de novo, o sistema de distribuição esquematizado na Figura 11. Neste exemplo, pretende-se determinar as condições de equilíbrio hidráulico e as cotas piezométricas nos nós de junção, pelo método da *Teoria Linear* (consequentemente, através das equações dos troços) e utilizando, tal como nos exemplos anteriores, a fórmula de *Hazen-Williams* para o cálculo das perdas de carga ($C = 100$ para todas as tubagens).

De acordo com os princípios enunciados, o sistema de equações que permite definir as condições de equilíbrio hidráulico é formado por quatro equações de continuidade (uma por cada nó de junção) e duas equações da conservação da energia (uma correspondente à malha imaginária e a outra relativa à malha natural do sistema). Estas equações são as seguintes:

Continuidade

$$Q_1 - Q_2 - Q_5 = 0 \quad (\text{nó 1}) \quad [61]$$

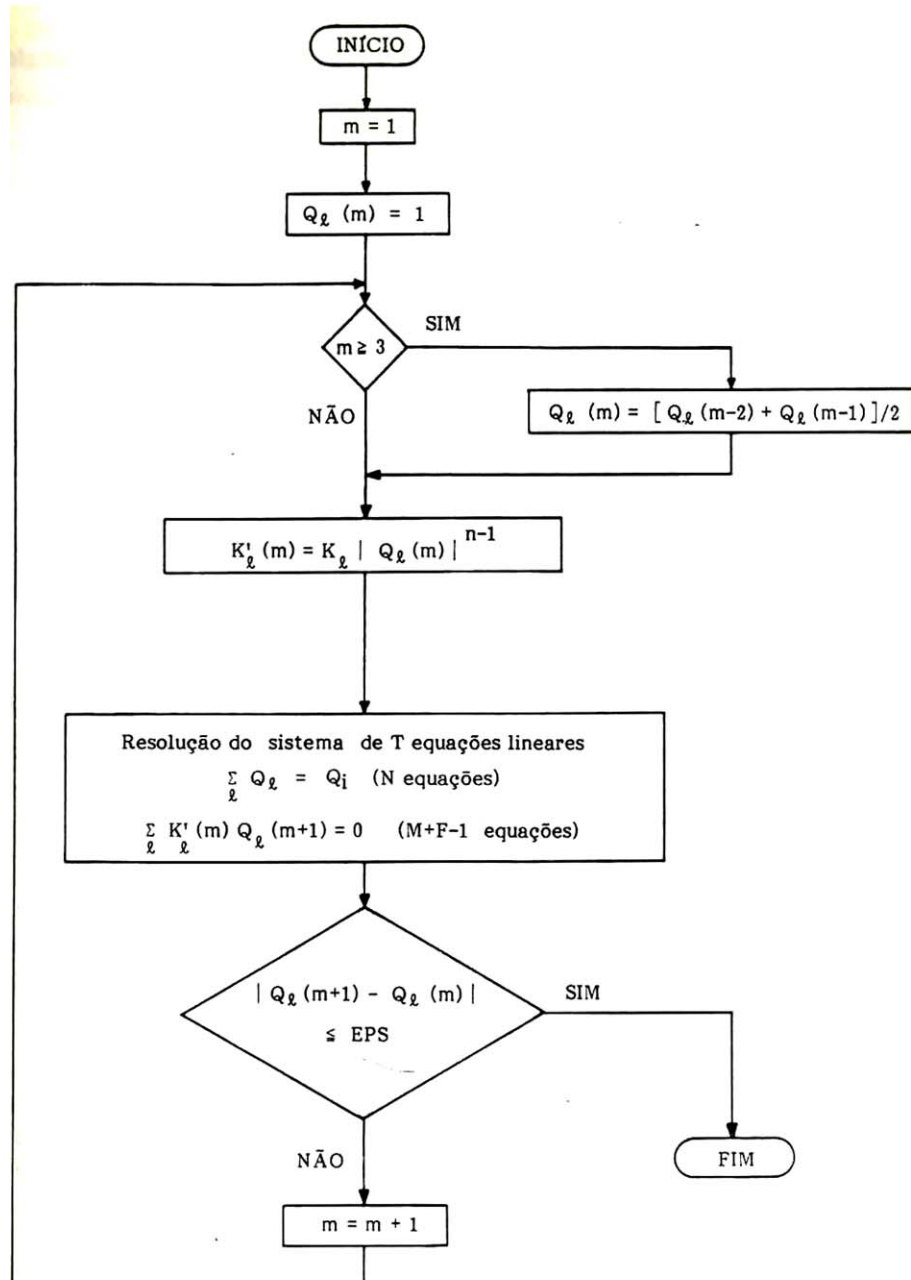


Figura 13 - Fluxograma sumário do método da *Teoria Linear*



$$Q_2 - Q_3 = 0,010 \quad (\text{nó 2}) \quad [62]$$

$$Q_3 + Q_4 = 0,005 \quad (\text{nó 3}) \quad [63]$$

$$-Q_4 + Q_5 + Q_6 = 0,015 \quad (\text{nó 4}) \quad [64]$$

Conservação da energia

$$-K_1 Q_1 - K'_5 Q_5 + K'_6 Q_6 + (80 - 70) = 0 \quad [65]$$

$$-K'_2 Q_2 - K'_3 Q_3 + K'_4 Q_4 + K'_5 Q_5 = 0 \quad [66]$$

sendo K'_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, 6$) os coeficientes de perda de carga modificados dados pela expressão [60]. Na primeira iteração os valores de K'_ℓ são iguais aos coeficientes de perda de carga que constam no quadro da Figura 11, uma vez que, no processo de inicialização, se considera que o caudal em cada tubagem é unitário ($1 \text{ m}^3/\text{s}$).

Nestas condições, o sistema de equações lineares a resolver na primeira iteração é, sob a forma matricial, o seguinte⁽¹⁵⁾:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -10725 & 0 & 0 & 0 & -78407 & 10725 \\ 0 & -26449 & -232437 & 78407 & 78407 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,010 \\ 0,005 \\ 0,015 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A correspondente solução é dada por:

$$Q_1 = 0,0117 \text{ m}^3/\text{s}; \quad Q_2 = 0,0106 \text{ m}^3/\text{s}; \quad Q_3 = 0,0006 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_4 = 0,0044 \text{ m}^3/\text{s}; \quad Q_5 = 0,0010 \text{ m}^3/\text{s}; \quad Q_6 = 0,0183 \text{ m}^3/\text{s}$$

A partir destes caudais, podem ser obtidos os novos valores dos coeficientes de perda de carga modificados da seguinte forma:

⁽¹⁵⁾ Os valores dos coeficientes de perda de carga foram arredondados.

$$\begin{aligned}
 K'_1 &= K_1 |Q_1|^{0,852} = 10725 \times 0,0117^{0,852} = 242,4 \\
 K'_2 &= K_2 |Q_2|^{0,852} = 26449 \times 0,0106^{0,852} = 549,5 \\
 K'_3 &= K_3 |Q_3|^{0,852} = 232437 \times 0,0006^{0,852} = 418,1 \\
 K'_4 &= K_4 |Q_4|^{0,852} = 78407 \times 0,0044^{0,852} = 770,2 \\
 K'_5 &= K_5 |Q_5|^{0,852} = 78407 \times 0,0010^{0,852} = 217,9 \\
 K'_6 &= K_6 |Q_6|^{0,852} = 10725 \times 0,0183^{0,852} = 354,8
 \end{aligned}$$

Nesta iteração, o sistema de equações lineares a resolver é o seguinte:

$$\begin{bmatrix}
 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
 -242,4 & 0 & 0 & 0 & -217,9 & 354,8 \\
 0 & -549,5 & -418,1 & 770,2 & 217,9 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 Q_1 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 Q_4 \\
 Q_5 \\
 Q_6
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0,010 \\
 0,005 \\
 0,015 \\
 -10 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

A correspondente solução é dada por:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= 0,0282 \text{ m}^3/\text{s}; & Q_2 &= 0,0112 \text{ m}^3/\text{s}; & Q_3 &= 0,0012 \text{ m}^3/\text{s} \\
 Q_4 &= 0,0038 \text{ m}^3/\text{s}; & Q_5 &= 0,0170 \text{ m}^3/\text{s}; & Q_6 &= 0,0018 \text{ m}^3/\text{s}
 \end{aligned}$$

O caudal a considerar na próxima iteração deve ser a média aritmética dos caudais das duas iterações anteriores, obtendo-se, neste caso, o seguinte:

$$\begin{aligned}
 Q_{1m} &= (0,0117 + 0,0282) / 2 = 0,0199 \text{ m}^3/\text{s}; & Q_{2m} &= (0,0106 + 0,0112) / 2 = 0,0109 \text{ m}^3/\text{s} \\
 Q_{3m} &= (0,0006 + 0,0012) / 2 = 0,0009 \text{ m}^3/\text{s}; & Q_{4m} &= (0,0044 + 0,0038) / 2 = 0,0041 \text{ m}^3/\text{s} \\
 Q_{5m} &= (0,0010 + 0,0170) / 2 = 0,0090 \text{ m}^3/\text{s}; & Q_{6m} &= (0,0183 + 0,0018) / 2 = 0,0101 \text{ m}^3/\text{s}
 \end{aligned}$$

A partir destes valores dos caudais, obtêm-se os correspondentes valores dos coeficientes de carga modificados e resolve-se o sistema de equação lineares, e assim sucessivamente até ser atingida a convergência.

No Quadro 5, apresentam-se os valores calculados nas diferentes iterações. O processo de cálculo converge ao fim de cinco iterações, tendo sido obtidas, para as condições de equilíbrio

hidráulico, os seguintes caudais nas tubagens:

$$Q_1 = 18,0 \text{ l/s}; \quad Q_2 = 11,7 \text{ l/s}; \quad Q_3 = 1,7 \text{ l/s}$$

$$Q_4 = 3,3 \text{ l/s}; \quad Q_5 = 0,3 \text{ l/s}; \quad Q_6 = 12,0 \text{ l/s}$$

QUADRO 5 - SÍNTESE DO CÁLCULO DO MÉTODO DA TEORIA LINEAR

Iteração (-)	Tubagens											
	1		2		3		4		5		6	
	Q_1 (l/s)	Q_{1m} (l/s)	Q_2 (l/s)	Q_{2m} (l/s)	Q_3 (l/s)	Q_{3m} (l/s)	Q_4 (l/s)	Q_{4m} (l/s)	Q_5 (l/s)	Q_{5m} (l/s)	Q_6 (l/s)	Q_{6m} (l/s)
1	11,7	11,7	10,6	10,6	0,6	0,6	4,4	4,4	1,0	1,0	18,3	18,3
2	28,2	19,9	11,2	10,9	1,2	0,9	3,8	4,1	17,0	9,0	1,8	10,1
3	16,8	18,4	12,3	11,6	2,3	1,6	2,7	3,4	4,5	6,8	13,2	11,6
4	17,7	18,0	11,7	11,7	1,7	1,7	3,3	3,3	6,0	6,4	12,2	11,9
5	18,0	18,0	11,7	11,7	1,7	1,7	3,3	3,3	6,3	6,3	12,0	12,0

A estes valores de caudais nas tubagens corresponde a distribuição de cotas piezométricas idêntica à apresentada para os exemplos dos métodos anteriores.

7. ELEMENTOS ACESSÓRIOS EM REDES DE DISTRIBUIÇÃO

7.1 Considerações gerais

Os elementos acessórios mais correntes em redes de distribuição de água são os seguintes:

- válvulas de seccionamento;
- válvulas de purga ou de descarga;
- hidrantes (bocas de incêndio e marcos de água);
- bocas de rega e de lavagem.

Além dos elementos acessórios enumerados, ainda se podem encontrar, em certas situações especiais, válvulas de retenção, válvulas redutoras de pressão, ventosas e medidores de caudal (para além dos contadores de água domiciliários).



Aspectos mais gerais relativos a estes elementos acessórios são discutidos no *Documento Tubagens e Acessórios de Ligação*, pelo que, neste parágrafo, apenas se discutem os aspectos mais particulares aplicáveis a redes de distribuição de água.

7.2 Válvulas de seccionamento

As válvulas de seccionamento, numa rede de distribuição de água, destinam-se a permitir o isolamento de determinados troços quando neles se verificam avarias (por exemplo, a ocorrência de uma rotura) ou quando é necessário proceder à remodelação/substituição de uma ou mais tubagens da rede ou de órgãos, ou ainda para a execução de ramais de ligação. Destinam-se, ainda, a permitir o corte do fornecimento de água, no ataque a um incêndio, numa zona vizinha da rede, se necessário. As válvulas de seccionamento são os principais órgãos de manobra numa rede de distribuição de água.

A sua colocação deverá ter como objectivo que o número de consumidores afectado, em caso de necessidade de suspensão, seja o menor possível. Com esse objectivo, haveria interesse óbvio em colocar o maior número possível de válvulas; no entanto essa tendência é contrariada por razões de ordem económica. Haverá que encontrar, assim, uma solução de compromisso que, sendo economicamente razoável, evite que um grande número de consumidores fique, em simultâneo, privado do fornecimento de água.

Em redes de distribuição de água, estes órgãos são, geralmente, colocados junto dos nós, não sendo tarefa fácil enumerar regras universais. A melhor forma de proceder será a de ensaiar uma dada colocação de válvulas e identificar quais os troços afectados em caso de suspensão, analisando a razoabilidade da solução.

Relativamente a este aspecto refere-se, em seguida, o que o Decreto Regulamentar nº 23/95, estipula, no seu artigo 40.º:

“1 - As válvulas de seccionamento devem ser instaladas de forma a facilitar a operação do sistema e minimizar os inconvenientes de eventuais interrupções do abastecimento.

2 - As válvulas de seccionamento devem ser devidamente protegidas e facilmente manobráveis e localizar-se, nomeadamente:

a) Nos ramais de ligação;



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

- b) Junto de elementos acessórios ou instalações complementares que possam ter de ser colocados fora de serviço;*
- c) Ao longo da rede de distribuição, por forma a permitir isolar áreas com um máximo de 500 habitantes;*
- d) Ao longo de condutas da rede de distribuição mas sem serviço de percurso, com espaçamentos não superiores a 1000 m;*
- e) Nos cruzamentos principais, em número de três;*
- f) Nos entroncamentos principais, em número de duas.”*

7.3 Válvulas de purga ou de descarga

As válvulas de purga ou de descarga (designadas, no Decreto Regulamentar nº 23/95, por descargas de fundo) destinam-se a permitir o esvaziamento das tubagens, por escoamento gravítico, em caso de reparação de avarias, execução de novas ligações ou para operações de limpeza e desinfecção.

Genericamente, as válvulas de purga ou de descarga devem ser localizadas nos pontos baixos das zonas da rede isoláveis por válvulas de seccionamento.

O Decreto Regulamentar nº 23/95, relativamente a válvulas de purga ou de descarga (descargas de fundo), nos seus artigos 47.º a 49.º, refere o seguinte:

“Artigo 47.º Descargas de fundo

1 - As descargas de fundo destinam-se a permitir o esvaziamento de troços de condutas e de partes de redes de distribuição situados entre válvulas de seccionamento, nomeadamente para proceder a operações de limpeza, desinfecção ou reparação, e devem ser instaladas:

- a) Nos pontos baixos das condutas;*
- b) Em pontos intermédios de condutas com o mesmo sentido de inclinação em comprimentos considerados relativamente elevados, tendo em atenção a necessidade de limitar o tempo de esvaziamento das condutas, e nas redes de distribuição extensas de modo a minimizar o número de consumidores prejudicados por eventuais operações de esvaziamento.*

2 - Nos casos referidos na alínea b) ao número anterior, as descargas de fundo devem



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

localizar-se imediatamente a montante ou a jusante das válvulas de seccionamento, respectivamente, nas condutas descendentes e nas condutas ascendentes.

Artigo 48.º Lançamento dos efluentes das descargas de fundo

1 - Os efluentes das descargas de fundo devem ser lançados em linhas de água naturais, colectores pluviais ou câmaras de armazenamento transitório, salvaguardando-se, em qualquer dos casos, os riscos de contaminação da água da conduta.

2 - Sempre que necessário, devem prever-se na zona de lançamento dispositivos de dissipação de energia cinética.

Artigo 49.º Dimensionamento das descargas de fundo

O dimensionamento de uma descarga de fundo consiste na determinação do seu diâmetro de modo a obter-se um tempo de esvaziamento do troço de conduta compatível com o bom funcionamento do sistema, não devendo o seu diâmetro ser inferior a um sexto do diâmetro da conduta onde é instalada, com um mínimo de 50 mm.”

As válvulas de purga ou de descarga são órgãos de manobra numerosos em redes de distribuição de água.

7.4 Hidrantes (bocas de incêndio e marcos de água)

Os hidrantes são órgãos em redes distribuição de água cuja função é garantir os caudais para combate a incêndios. Neste parágrafo, apenas se especificam as disposições regulamentares sobre esta matéria. O Decreto Regulamentar nº 23/95, relativamente a hidrantes, nos seus artigos 54.º a 56.º, refere o seguinte:

“Artigo 54.º Hidrantes

1 - Consideram-se hidrantes as bocas de incêndio e os marcos de água.

2 - As bocas de incêndio podem ser de parede ou de passeio, onde normalmente se encontram incorporadas.

3 - Os marcos de água são salientes em relação ao nível do pavimento.

4 - A concepção dos hidrantes deve garantir a sua utilização exclusiva pelas corporações de bombeiros e serviços municipais.



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E ARQUITECTURA
SECÇÃO DE HIDRÁULICA E DOS RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAIS
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

Artigo 55.º Localização dos hidrantes

A localização dos hidrantes cabe à entidade gestora, ouvidas as corporações de bombeiros locais, devendo atender-se às seguintes regras:

a) As bocas de incêndio tendem a ser substituídas por marcos de água e, onde estes não se instalem, o afastamento daquelas deve ser de 25 m no caso de construções em banda contínua;

b) Os marcos de água devem localizar-se junto do lancil dos passeios que marginam as vias públicas, sempre que possível nos cruzamentos e bifurcações, com os seguintes espaçamentos máximos, em função do grau de risco de incêndio da zona:

200 m - grau 1;

150 m - grau 2;

130 m - grau 3;

100 m - grau 4;

A definir caso a caso - grau 5.

Artigo 56.º Ramais de alimentação de hidrantes

1 - Os diâmetros nominais mínimos dos ramais de alimentação dos hidrantes são de 45 mm para as bocas de incêndio e de 90 mm para os marcos de água.

2 - Os diâmetros de saída são fixados em 40 mm para as bocas de incêndio e em 60 mm, 75 mm e 90 mm para os marcos de água.”

7.5 Bocas de rega e de lavagem

As bocas de rega e de lavagem, como o próprio nome indica, destinam-se a ligar as mangueiras para alimentação de camiões-tanque para utilização pública, para a lavagem de ruas e para rega de espaços verdes. Estes órgãos podem funcionar, quando colocadas em pontos altos da rede de distribuição, como ventosas.

As disposições estipuladas, sobre esta matéria, no Decreto Regulamentar nº 23/95 (artigo 53.º), são as seguintes:

“1 - A implantação das bocas de rega e lavagem é função da organização urbanística dos aglomerados populacionais, nomeadamente arruamentos e espaços verdes.



2 - O afastamento entre bocas de rega e lavagem, quando necessárias, não deve ser superior a 50 m.

3 - O diâmetro nominal mínimo das bocas de rega e lavagem e respectivos ramais de alimentação é de 20 mm.”

7.6 Ventosas

Salvo em casos especiais, como por exemplo em condutas sem serviço de percurso, não é usual a utilização de ventosas em redes de distribuição de água, excepto nos pontos extremos de condutas periféricas ascendentes.

Este procedimento baseia-se no facto de se admitir que a saída do ar que entra (durante uma operação de enchimento numa conduta após a reparação de uma rotura), ou se pode acumular na rede em condições de funcionamento normal, ocorre nos dispositivos de utilização domiciliária e de utilização pública (fontanários, por exemplo), ou através da operação das bocas de rega e de lavagem.

O Decreto Regulamentar nº 23/95, relativamente a ventosas, nos seus artigos 45.º a 46.º, refere o seguinte:

“Artigo 45.º Ventosas

As ventosas, que podem ser substituídas por bocas de rega e lavagem desde que seja garantida a sua operação periódica, têm por finalidade permitir a admissão e a expulsão de ar nas condutas.

Artigo 46.º Localização e diâmetro das ventosas

1 - As ventosas devem ser localizadas nos pontos altos, nomeadamente nos extremos de condutas periféricas ascendentes, e nas condutas de extensão superior a 1000 m sem serviço de percurso.

2 - Nas condutas extensas referidas no número anterior, as ventosas devem localizar-se:

- a) A montante ou a jusante de válvulas de seccionamento consoante se encontrem respectivamente em troços ascendentes ou descendentes;*
- b) Na secção de jusante de troços descendentes pouco inclinados quando se lhes segue um troço descendente mais inclinado.*



3 - O diâmetro mínimo de uma ventosa não deve ser inferior a um oitavo do diâmetro da conduta onde é instalada, com um mínimo de 20 mm.”

7.7 Outros elementos acessórios. Mapa de nós

Para além dos elementos acessórios discutidos no parágrafo anterior, há que ter em conta, ainda, as peças especiais, como sejam:

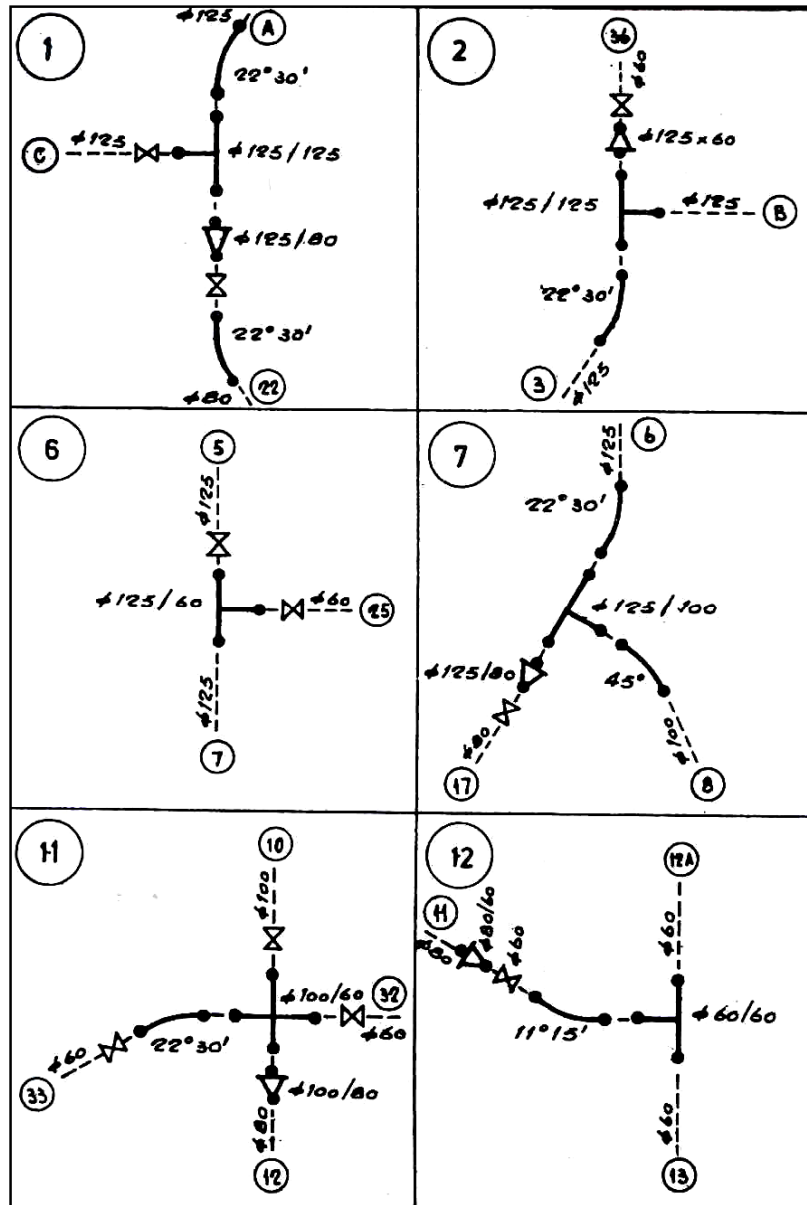
- juntas;
- curvas;
- tês, cruzetas e forquilhas;
- cones de redução;
- juntas de transição e cegas,

as quais existem em número muito significativo em redes de distribuição de água. Há, ainda, que ter presente os maciços de ancoragem ou de amarração.

Os aspectos relativos a estes elementos acessórios são discutidos no *Documento Tubagens e Acessórios de Ligação*, pelo que se remete o leitor para este documento.

A terminar este parágrafo, resta referir que, em projectos de execução de redes de distribuição de água, deve ser incluído, para além das restantes peças desenhadas, um esquema, habitualmente designado por *mapa dos nós*, em que se representam, esquematicamente, os elementos acessórios anteriormente referidos, para cada nó, para efeitos de execução em obra.

Na Figura 14, apresenta-se um exemplo ilustrativo de um mapa de nós, no qual figuram os casos mais representativos que habitualmente aparecem na prática.



- |X|-- Válvula de seccionamento
- |+|-- Tê
- |+|-- Cruzeta
- |C|-- Curva
- |>|-- Cone de redução

Figura 14 – Exemplo ilustrativo de um mapa de nós de uma rede de distribuição de água